THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

Présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Madame Christiane RIGOLOT

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sur la théorie Mathématiques de l'équation de Boltzmann

Soutenue le 10 JANVIER 1973 devant la Commission d'Examen

MM. AVEZ ..... Président

GUIRAUD .....
GOULAOUIC .... } Examinateurs

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

Présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Madame Christiane RIGOLOT

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sur la théorie Mathématiques de l'équation de Boltzmann

Soutenue le 10 JANVIER 1973 devant la Commission d'Examen

MM. AVEZ ..... Président

GUIRAUD ..... } Examinateurs
GOULAOUIC .... }

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je voudrais que dans ces quelques lignes Monsieur le Professeur GUIRAUD trouve l'expression de ma profonde gratitude. Il a toujours su me guider avec compréhension, et sans lui ce modeste mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Monsieur le Professeur AVEZ a bien voulu me proposer un second sujet qui, en m'éloignant de mes préoccupations habituelles, m'a permis d'entrevoir quelques éléments d'un domaine particulièrement fécond des mathématiques actuelles.

Le hasard fait que par ailleurs, c'est grâce à lui que j'ai pu obtenir mon premier poste dans l'enseignement supérieur, et commencer ainsi ce travail. Qu'il en soit remercié.

Je tiens enfin à exprimer ma gratitude à Monsieur le Professeur GOULAOUIC, pour l'indulgence avec laquelle il a examiné mon manuscript.

La présentation matérielle est due aux soins attentifs de Mesdames SIMON, BECU et JARIEL, de l'Université de PARIS XIII ; qu'elles trouvent ici l'expression de mes remerciements.

TABLE DES MATIERES

Introduction et généralités 1

Résultats préliminaires de théorie cinétique

I - Propriétés de l'équation de Boltzmann 3

II - Propriétés de l'opérateur de réflexion à la paroi 7

Résumé des résultats essentiels obtenus 10

Chapitre I - Equation de Boltzmann linéaire stationnaire sur la droite

1 - Résolution du problème intermédiaire $\mathcal{M}f = \phi$ I-1

2 - Equation intégrale associée au problème $\mathcal{M}f - Af = g$ I-8

3 - Equation modifiée (E_N) I-9

Théorème principal I-10

4 - Unicité de la solution de (E_N) dans $L^2(R,H)$ I-11

5 - Compacité de l'opérateur $UA\,P_N$ dans $L^2(R,H)$ I-13

6 - Convergence de $f_N(x, \vec{\xi})$ quand $N \to \infty$ I-16

Chapitre II - Equation linéaire, stationnaire sur la demi droite, avec conditions de réflexion linéaires à la paroi.

1 - Résolution du problème intermédiaire II-2

2 - Equation intégrale associée au problème posé II-19

3 - Equation modifiée II-20

Théorème principal II-21

4 - Unicité de la solution de l'équation modifiée dans $L^2,R^+,H)$ II-22

5 - Compacité de l'opérateur $W\,A\,\overline{P}_N$ dans $L^2(R^+,H)$ II-24

6 - Convergence de $f_N(x,\vec{\xi})$ pour N infini II-28

Chapitre III - Equation linéaire non stationnaire, sur le droite dans $L^2(R,H)$

1 - Equation homogène aux valeurs initiales dans $L^2(R,H)$ III-2

2 - Etude $\mathcal{C}(t)\,f_o$ dans $\mathcal{X}$ III-6

Théorème principal III-14

3 - Problème non homogène III-15

Chapitre IV - Problème linéaire, non stationnaire, sur la droite, dans les espaces $\mathcal{B}_r$

Théorème principal IV-2

1 - Problème tronqué IV-3

2 - Convergence de f_α quand α tend vers l'infini IV-8

3 - Régularité de f. Convergence de $\mathcal{M}_\alpha f_\alpha$ IV-13

4 - Majoration de $T(t, -\mathcal{M}+A)f_o$ au cours du temps IV-17

Chapitre V - Problème non linéaire, non stationnaire, sur la droite, dans l'espace $\mathcal{B}_r(L^2(R) \cap L^\infty(R))$

1 - Majoration de $T(t, -\mathcal{M}+A)f_o$ dans $\mathcal{B}_{r,T}$ V-3

2 - Etude dans $\mathcal{B}_{r,T}$ de $\Phi(h,g)$ V-7

3 - Résolution de l'équation intégrale par itération V-10

4 - Régularité de la solution. Résolution du problème I V-13

Théorème principal V-16

Annexe A

Théorème A-1

Théorème A-2

Théorème A-3

Théorème A-4

Théorème A-5

Annexe B

I - Calcul de $\Delta_{\alpha\beta} = (\xi\, \Psi_\alpha(\vec{\xi}), \Psi_\beta(\vec{\xi}))_H$

II - Calcul de $\delta_{ij} = (\theta_i(\vec{\xi}), \theta_j(\vec{\xi}))_H$

Bibliographie

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552722_0027

INTRODUCTION ET GENERALITES

Depuis la mort de Boltzmann en 1906, l'équation qui gouverne l'évolution de la fonction de distribution d'un gaz raréfié, dont il est l'auteur, a suscité de nombreux développements.

Nous supposerons connus les fondements physiques et l'établissement mathématique de cette équation, que l'on retrouvera dans le mémoire de Boltzmann lui-même [2] .

L'un des points capitaux a d'abord été de comparer les deux descriptions, maintenant possibles, d'un gaz dilué : au niveau moléculaire d'une part, par la théorie cinétique des gaz, c'est-à-dire par l'intermédiaire de la fonction de distribution de ses molécules, et qui satisfait à l'équation de Boltzmann, et, d'autre part, par les théories classiques de la mécanique des fluides. C'est ce qui fit l'objet, de 1917 à 1932, de la recherche de solutions dites normales, tout d'abord par Hilbert, puis Chapman et Enskog, et dont on trouvera l'exposé dans le livre de Chapman et Cowling [11] principalement. Ces méthodes donnent encore lieu à de nombreux développements.

Par ailleurs, Carleman s'interessa à la résolution elle même de l'équation de Boltzmann non linéaire, dans le cas d'un modèle moléculaire physiquement simple, rendant les calculs explicites possibles, celui des sphères rigides. Cette étude fut menée à bien [4] , et reste encore actuellement du plus grand intérêt.

C'est en 1949 que Grad reprit le problème [18] , d'un point de vue mathématique aussi général que possible. Les mémoires [17] et [20] permirent alors à l'étude de l'équation de Boltzmann de prendre un nouvel aspect. L'ensemble des connaissances concernant ce sujet est exposé par Grad dans son article de synthèse [16] .

Afin de traiter plus facilement de nombreux problèmes spécifiques de la théorie cinétique, notamment celui de la structure d'un choc, l'équation de Boltzmann fut remplacée par une de ses approximations les plus interressantes, rendant compte de plusieurs de ses propriétés fondamentales : le second membre est remplacé par un "modèle" plus maniable, supprimant ainsi la difficulté du caractère intégral de noyau de collision. Le plus classiquement utilisé est le modèle proposé par

Bathnagar, Gross, Krook et Jackson [3] , [23] , et les résultats obtenus sont très utiles pour la dynamique des gaz. Ils ont été appliqués en particulier par Cercignani [6] , Chahine [10] , Darrozes [12] , et Sirovich [36] , [37] .

L'équation de Boltzmann a pu être plus récemment étudiée sous sa forme linéarisée, avec les méthodes d'analyse fonctionnelle, problèmes abstraits d'existence et d'unicité de la solution, et problème du comportement de la solution pour les variables d'espace et de temps. Le problème de Cauchy notamment fut étudié par Arceniev [1] , Fetz [15] , et Scharf [33] , [34] .

Le problème aux limites, de son coté, soulève d'abord le problème de la forme de l'intéraction entre la paroi et les particules du gaz considéré, et une étude physique, actuellement encore en cours, indique les hypothèses à formuler concernant le modèle qui rend le mieux compte du phénomène. Cette étude fut commencée par Nocilla [30] , et reprise par Cercignani d'un point de vue plus mathématique [7] , ainsi que par Guiraud [24] . [25] .

Quant à la forme non linéaire de l'équation de Boltzmann, on dut attendre les récentes estimations de Grad [22] , pour pouvoir reprendre le problème. Seules ont été étudiées dans ce cas l'existence de l'unicité de la solution, ceci pour le problème de Couette, par Pao [31] , et pour le problème intérieur par Guiraud [25] .

RESULTATS PRELIMINAIRES DE THEORIE CINETIQUE

I - Propriétés de l'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann, en l'absence de forces extérieures, a la forme :

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{t}} + \vec{\underline{\xi}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} = Q(F,F) \quad , \qquad \vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$$

où F , fonction de distribution du gaz considéré, dépend de manière générale des sept variables : $\vec{\underline{x}}$, $\vec{\underline{\xi}}$, $\underline{t}$.

$Q(F,F)$ est l'opérateur quadratique de collision, qui représente la variation de la fonction F due aux intéractions entre les particules. Ce terme est la différence de deux expressions, l'une de gain et l'autre de perte, soit :

$$Q(F,F) = \int \left[F(\vec{\underline{\xi}}') \, F(\vec{\underline{\xi}}_1') - F(\vec{\underline{\xi}}) \, F(\vec{\underline{\xi}}_1) \right] d\Omega \, ,$$

où $F(\vec{\underline{\xi}})$ et $F(\vec{\underline{\xi}}_1)$ sont les fonctions de distribution des molécules ayant pour vitesses particulaires avant l'interaction $\vec{\underline{\xi}}$ et $\vec{\underline{\xi}}_1$ et $F(\vec{\underline{\xi}}')$ et $F(\vec{\underline{\xi}}_1')$ celles des molécules qui avant l'interaction avaient $\vec{\underline{\xi}}'$ et $\vec{\underline{\xi}}_1'$ pour vitesses ; $d\Omega$ est l'élément différentiel de dimension 5 , par rapport auquel il convient d'intégrer, pour décrire la géométrie de la collision.

Le détail du processus de collision, et la forme détaillée de $Q(F,F)$ sont exposés en particulier dans les ouvrages de Boltzmann [2], de Carleman [4], de Chapman et Cowling [11] , et de Grad [16] .

L'équation précédente a pour solution la distribution d'équilibre dite Maxwellienne, F_M , déterminée par les grandeurs macroscopiques habituelles, ρ_o , $u_o = o$, et $C_o^2 = 2R\,T_o$:

$$F_M = \frac{\rho_o}{(2\pi\, C_o^2)^{3/2}} \exp\left(- \frac{|\vec{\xi}|^2}{2\, C_o^2} \right)$$

Etudions alors les faibles déviations de l'équilibre, et procédons à la linéarisation de l'équation de Boltzmann, en variables sans dimensions, en introduisant les échelles de temps, d'espace et de vitesse :

$$t = \frac{\underline{t}}{\tau_o} \quad , \quad \vec{x} = \frac{\vec{\underline{x}}}{C_o\, \tau_o} \quad , \quad \vec{\xi} = \frac{\vec{\underline{\xi}}}{C_o} \quad ,$$

où τ_o est le temps moyen de collision, et dont la valeur dépend du potentiel d'interaction intermoléculaire.

La fonction maxwellienne d'équilibre, s ns dimensions, est alors :

$$\omega(\vec{\xi}) = \frac{C_o^3}{\rho_o} F_M$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(\frac{-|\vec{\xi}|^2}{2}\right)$$

Pour des raisons de normalisation, reprenons la méthode employée par Grad, et posons :

$$F = F_M (1 + \Phi)$$

$$f = \omega^{1/2} \Phi \quad ,$$

et nous obtenons pour la fonction $f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$, l'équation :

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + Lf = J(f,f) \quad , \quad \text{où}$$

$$1 \; f = 2 \, \omega^{-1/2} \, Q(\omega, \omega^{1/2} f) \quad ,$$

$$J(f,f) = \omega^{-1/2} \, Q(\omega^{1/2} f \; , \; \omega^{1/2} f)$$

L est l'opérateur de Boltzmann linéarisée, et nous allons rappeler les propriétés de L et de J, ceci pour une classe restreinte de potentiels intermoléculaires, que Grad a précisés dans la référence [17].

Introduisons tout d'abord l'espace fonctionnel H , cadre de l'équation de Boltzmann, relativement à la variable $\vec{\xi}$: H est l'espace des vitesses R^3 , où le produit scalaire et la norme sont :

$$(f,g)_H = \int_{R^3} f(\vec{\xi}) \, g(\vec{\xi}) \, d\vec{\xi}$$

$$||f||_H^2 = \int_{R^3} f^2(\vec{\xi}) \, d\vec{\xi} \; .$$

A - <u>Propriétés de l'opérateur de collision linéarisé L.</u>

A condition d'introduire une coupure dans le domaine d'interaction entre deux particules, coupure soit radiale, comme le propose Cercignani dans [8] , soit angulaire exposée par Grad dans [16] , l'opérateur L peut être considéré comme somme de deux opérateurs :

$$Lf = \nu(\vec{\xi}) f - Af$$

où $\nu(\vec{\xi})$, fréquence de collision, est une fonction positive de $\vec{\xi}$, qui ne dépend que de $|\vec{\xi}|$, et où A est un opérateur intégral.

Une propriété importante, provenant du fait que la masse, la quantité de mouvement, et l'énergie sont conservées au cours d'une collision, est la suivante : l'opérateur L admet zéro comme valeur propre d'ordre 5 , et le sous espace de H, noyau de L , est engendré par cinq fonctions, "invariants des rencontres" , qui, d'après notre normalisation, peuvent s'écrire :

$$\Psi_o(\vec{\xi}) = \omega^{1/2}$$

$$\Psi_i(\vec{\xi}) = \omega^{1/2}\ \xi_i \qquad i = 1, 2, 3 .$$

$$\Psi_4(\vec{\xi}) = \omega^{1/2}\ \frac{|\vec{\xi}|^2-3}{\sqrt{6}}$$

Le fait que l'opérateur L n'est pas défini positif rendra difficiles à atteindre des estimations pour la projection de f sur ce noyau, dans H .

L'opérateur A , et par suite L , sont symétriques, et il est possible d'établir que L est non négatif :

$$(Lf,g)_H = (f,Lg)_H$$

$$(Lf,f)_H \geq o.$$

Restreignons nous maintenant à une classe de potentiels intermoléculaires, dits "potentiels durs", (qui inclue les sphères rigides de Carleman [4] , et la force radiale en puissance d'exposant supérieur à 5) , pour laquelle les propriétés suivantes ont lieu :

1) La fonction $\nu(\vec{\xi})$ est bornée inférieurement par sa valeur $\nu(o)$ pour $\vec{\xi} = o$; elle n'est pas monotone en $|\vec{\xi}|$, mais il existe deux nombres positifs a et b, tels que pour tout $\vec{\xi}$ on ait :

$$a(1 + |\vec{\xi}|) < \nu(\vec{\xi}) < b(1 + |\vec{\xi}|) .$$

2) L'opérateur A est intégral, auto adjoint dans H ; son noyau k est symétrique, et est différence de deux noyaux positifs k_1 et k_2 :

$$Af = \int k(\vec{\xi} - \vec{\eta})\ f(\vec{\eta})\ d\vec{\eta} \text{ , et de plus ,}$$

$k(\vec{v})$ est intégrable dans R^3 , et de carré intégrable dans R^3 la propriété ayant lieu séparément pour k_1 et k_2 .

3) Un résultat important, démontré par Grad [17] , est que A est non seulement borné, mais aussi compact dans H , l'itéré troisième étant de carré sommable. Il en résulte que : L possède de ce fait les propriétés suivantes : l'origine est un point isolé du spectre, le spectre essentiel est formé des valeurs prises par $\nu(\vec{\xi})$.

4) Notons Qf la projection de f sur le sous espace de H orthogonal au noyau de L . Il existe alors une constante μ , telle que :

$$(Lf,f)_H \geq \mu \ ||Qf||_H^2$$

5) L'opérateur A vérifie en particulier les inégalités :

$$||Af||_H \leq k_o \ ||f||_H$$

$$\max_{\vec{\xi} \in R^3} |Af| \leq k_1 \ ||f||_H$$

$$\max_{\vec{\xi} \in R^3} (1 + |\vec{\xi}|^2)^{r/2} \ |Af| \leq k_{r-1} \max_{\vec{\xi} \in R^3} (1 + |\vec{\xi}|^2)^{\frac{r-1}{2}} \ |f| \ , \quad r \geq 1$$

B - Propriétés de l'opérateur quadratique $J(f,f)$

Une propriété importante des invariants des rencontres est que les équations de continuité, de quantité de mouvement, et du bilan énergétique sont obtenues comme conséquence directe de l'équation de Boltzmann, ceci en associant à $Q(F,F)$ la forme bilinéaire $Q(F,G)$, et en montrant que :

$\int Q(F,G)(\vec{\xi}) \ \phi(\vec{\xi}) \ d\vec{\xi}$ est nul dès que $\phi(\vec{\xi})$ est un invariant des rencontres. La définition des grandeurs macroscopiques à partir de F , que nous n'avons pas rappelée ici, permet alors de retrouver les équations annoncées.

Une conséquence immédiate pour $J(f,f)$ est que la forme bilinéaire associée $J(f,g)$ est orthogonale aux invariants des rencontres dans H.

Le seul résultat obtenu jusqu'à présent pour évaluer $J(f,g)$, en dehors du cas des sphères rigides de Carleman [4] , est celui de Grad pour les potentiels durs :

Posons $J(f,f) = \nu(\vec{\xi})\ \Gamma(f,f)$

Pour $r \geq 1$:

$$\underset{\vec{x},\vec{\xi}}{\mathrm{Max}}\ (1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}\ |\Gamma(h,g)| \leq \aleph_0\ \underset{\vec{x},\vec{\xi}}{\mathrm{Max}}(1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}|f|\ \underset{\vec{x},\vec{\xi}}{\mathrm{Max}}(1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}|g|$$

Pour $r > 1$:

$$\underset{\vec{\xi}}{\mathrm{Max}}(1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}\{\int |\Gamma(h,g)|^2 dx\}^{1/2} \leq \aleph_0\ \underset{\vec{\xi},\vec{x}}{\mathrm{Max}}(1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}|f|\ .\ \underset{\vec{\xi}}{\mathrm{Max}}(1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}\{\int g^2\ dx\}^{1/2}$$

Notons la méthode employée pour parvenir à ces résultats :

$\nu\ \Gamma < \nu\ \Gamma_1 + \nu\ \Gamma_2$ où

$$\nu\ \Gamma_1(f,g) = \frac{1}{2} \int |f(\vec{\xi})\ g(\vec{\xi}_1) + f(\vec{\xi}_1)\ g(\vec{\xi})|\ \omega(\vec{\xi}_1)^{1/2}\ d\Omega$$

$$\nu\ \Gamma_2(f,g) = \frac{1}{2} \int |f(\vec{\xi}')\ g(\vec{\xi}_1') \quad + \quad f(\vec{\xi}_1')\ g(\vec{\xi}')|\ \omega(\vec{\xi}_1)^{1/2}\ d\Omega$$

Les opérateurs Γ_1 et Γ_2 vérifient chacun une majoration du même type que celle que nous avons indiquée pour Γ .

II - Propriétés de l'opérateur de réflexion à la paroi.

Le phénomène de réflexion à la paroi, d'abord étudié expérimentalement, a conduit à certaines hypothèses simples que nous reprendrons ici.

Nous nous plaçons dans le cas particulièrement simple d'une paroi plane, dans le plan $x = o$, dont la nature est indépendante du point considéré et du temps. Cette paroi sera supposée fixe.

Reprenons les notations classiques de Cercignani [5] , [6] et de Guiraud [24] , [25] , et désignons par :
$F^+(o,\vec{\xi},t)$ et $F^-(o,\vec{\xi},t)$ les restrictions de la fonction de distribution à la paroi $F(o,\vec{\xi},t)$, aux valeurs positives et négatives de la vitesse particulaire normale à la paroi, qui n'est autre ici que la composante ξ du vecteur $\vec{\xi}$.

La forme générale de la condition de réflexion est donnée par une fonctionnelle K , qui dépend de la nature de la paroi et des molécules constituant le gaz, et telle que :

$$F^+(o,\vec{\xi},t) = K\ F^-(o,\vec{\xi},t)$$

La fonctionnelle K tire ses propriétés soit de raisons purement physiques, soit d'hypothèses mathématiques :

1) La paroi est supposée non absorbante, ce qui est équivalent, pour l'opérateur K, à la relation :

$$\int \xi F^- \, d\vec{\xi} + \int \xi \, KF^- \, d\vec{\xi} = 0$$

2) Nous ferons l'hypothèse que cette paroi est localement un thermostat à la température T, c'est-à-dire, tout gaz dont la distribution est maxwellienne, correspondant à cette température, soit :

$$F_M = n \, (2\pi \, RT)^{-3/2} \exp(- \frac{|\vec{\xi}|^2}{2RT}) \, ,$$

se réfléchit à la paroi de telle sorte que la distribution réfléchie est aussi maxwellienne, à la même température, soit :

$$F_M^+ = K \, F_M^-$$

L'opérateur K n'est pas linéaire, mais cette dernière propriété va, dans le cas d'une faible perturbation de l'équilibre, permettre de déduire la forme linéarisée des conditions de réflexion, comme il est indiqué dans [24] et [25] . Ici, la vitesse de la paroi est nulle, et nous supposerons RT voisin de 1, si bien que la distribution maxwellienne d'équilibre peut être approchée :

$$F_M \simeq n \, \omega \, (1 + f_M)$$

$$\text{où} \qquad f_M = \frac{1}{2} \, (RT - 1) \, (|\vec{\xi}|^2 - 3) \, ,$$

tandis que la distribution cherchée F est supposée de la forme

$$F = \omega(1 + \Phi) \, , \quad \text{où} \quad \phi \text{ est petite.}$$

L'approximation de F déduite :

$F = n^{-1} \, F_M(1 + \Phi - f_M)$, reportée dans la relation

$F^+ = KF^-$ conduit à la linéarisation suivante :

Supposons K différentiable du sens de Fréchet, et soit $\mathcal{G}$ sa différentielle. Nous obtenons alors, en ne retenant que les termes du premier ordre :

$$\Phi^+ = \mathcal{G} \, \Phi^- + \Psi^+ \, , \text{ où}$$

$$\Psi^+ = \frac{1}{2} \, (RT - 1) \, (|\vec{\xi}|^{+2} - \mathcal{G} \, |\vec{\xi}|^{-2})$$

Afin d'obtenir des notations cohérentes avec celles obtenues précédemment pour l'équation de Boltzmann, posons :

$$f = \omega^{1/2} \Phi .$$

Les propriétés résultant du fait que la paroi est localement un thermostat d'une part, et est non absorbante, se traduit pour l'opérateur linéarisé $\mathcal{G}$ par les relations :

$$(\omega^{1/2})^+ = \mathcal{G}(\omega^{1/2})^- \qquad \text{et}$$

$$\int \xi \, (f^- + \mathcal{G} f^-) \, d\vec{\xi} = o$$

3) Nous supposerons que $\mathcal{G}$ est donné par un noyau, c'est-à-dire s'écrit sous forme intégrale :

$$\mathcal{G} f^- = \int \Gamma(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1) \, f^-(\vec{\xi}_1) \, d\vec{\xi}_1 ,$$

Le fait que l'opérateur $\mathcal{G}$ est non négatif montre que $\Gamma(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1)$ est non négatif, et est nul pour ξ_1 positif ou ξ négatif.

Dans ce cas particulier, ceci a pour conséquence la relation de convexité suivante, que nous supposerons encore vraie dans le cas d'un opérateur de réflexion plus général :

$$\int \xi \, f^2(\vec{\xi}) \, d\vec{\xi}\Big|_{x=o} \leqslant o ,$$

l'égalité ayant lieu si $f(o,\vec{\xi},t)$ est indépendante de $\vec{\xi}$.

4) Pour des raisons mathématiques, on est amené à définir l'opérateur $\mathcal{G}^*$ "adjoint" de $\mathcal{G}$ au sens suivant : pour toute fonction f^- et toute fonction h^+ , on a :

$$\int |\xi^-| \, f^- \, \mathcal{G}^* \, h^+ \, d\vec{\xi} = \int |\xi^-| \, \mathcal{R}\mathcal{G} f^- \, \mathcal{R} h^+ \, d\vec{\xi} ,$$

où $\mathcal{R}$ est l'opérateur défini par :

$$Rf(\xi, \eta, \mathcal{S}) = f(-\xi, \eta, \mathcal{S}).$$

L'opérateur $\mathcal{G}^*$ est alors tel que :

$$(\omega^{1/2})^- = \mathcal{G}^* \, (\omega^{1/2})^+ ,$$

et, si f et h vérifient :

$$f^+ = \mathcal{G} f^- , \quad \text{et} \quad h^- = \mathcal{G}^* \, h^+ , \quad \text{il s'en suit que}$$

$$\int \xi \, f(o,\vec{\xi},t) \, g(o,\vec{\xi},t) \, d\vec{\xi} = o .$$

Des hypothèses supplémentaires concernant $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ seront faites aux chapitres II et IV .

RESUME DES RESULTATS ESSENTIELS OBTENUS

Chapitre I - Equation de Boltzmann linéaire stationnaire sur le droite

Nous avons étudié ici le problème de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation de Boltzmann, unidimensionnelle, stationnaire, à une dimension d'espace, sur un intervalle non borné, problème étroitement lié à la structure du choc faible. Nous avons employé l'équation de Boltzmann linéarisée, où le second membre est supposé orthogonal aux invariants des rencontres. Ce problème en domaine non borné ne fut étudié qu'à l'aide de modèles, en particulier le modèle de Krook, pour obtenir des solutions exactes (Darrozes [12] , Sirovich [37]) , tandis que pour le domaine borné, le cas stationnaire ne fut étudié que rarement et contient les conditions aux limites. Les méthodes sont par ailleurs bien différentes.

Nous établissons un théorème d'existence et d'unicité de la solution dans l'espace $L^2(R,H)$, qui satisfait l'équation de Boltzmann aux sens fort dans $L^2(R,H)$.

Chapitre II - Equation linéaire, stationnaire, sur la demi droite, avec conditions de réflexion linéaires à la paroi.

C'est sur la demi droite que nous étudions maintenant le problème stationnaire, et, à la difficulté apportée par le fait que le domaine soit non borné, s'ajoute maintenant le phénomène à la paroi.

Les méthodes employées dans [7] par Cercignani, et faisant intervenir explicitement le domaine et son diamètre ne sont plus utilisables, de même celles employées par Guiraud pour le problème de Couette [24] et le problème intérieur général.

Le cadre fonctionnel de notre étude est $L^2(R^+,H)$, et nous établissons que, pour un second membre orthogonal aux invariants des rencontres, la partie orthogonale à ces invariants, de la solution du problème, a la propriété d'appartenir à $L^2(R^+,H)$, tandis que des résultats moins forts sont obtenus pour la composante hydrodynamique, dont on ne peut atteindre que les dérivées.

Chapitre III - Equation linéaire, non stationnaire sur la droite dans $L^2(R,H)$

Le problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann linéarisée et pour le modèle de Krook ont fait l'objet de nombreuses études, surtout récemment, à l'aide des semi-groupes d'opérateurs.

Le mémoire [19] de Grad étudie le problème en domaine non borné, mais suppose que la solution est périodique pour la variable d'espace, ce qui permet alors d'appliquer les méthodes adaptées aux domaines bornés, sans malgré tout tenir compte des conditions aux limites.

Arceniev étudie le problème de Cauchy homogène dans [1] en s'interressant aux propriétés spectrales des opérateurs. Par contre le mémoire de Fetz [15] suppose que la variable d'espace n'intervient pas, ou bien que la valeur initiale est un invariant des rencontres.

Le problème non homogène, à second membre orthogonal aux invariants des rencontres est déduit du cas homogène, que nous étudions au cours du temps dans $L^2(R,H)$. La décroissance au cours du temps ne peut être établie que pour la projection de f sur H orthogonale aux invariants des rencontres, le résultat dépendant d'hypothèses de régularité de la valeur initiale. Des renseignements sont obtenus sur les dérivées par rapport au temps et à la variable d'espace, pour la solution f du problème.

Chapitre IV - Problème linéaire, non stationnaire, sur la droite, dans les espace $\mathcal{B}_r$

C'est en vue d'étudier au chapitre V le problème non linéaire, non stationnaire, sur la droite, que nous avons repris l'étude du problème linéaire faite au chapitre III, mais dans un espace qu'il convient d'employer pour la théorie non linéaire, alors que cet espace semble peu adapté au problème linéaire.

On verra quelles difficultés on rencontre pour y obtenir une majoration, même croissante au cours du temps, et qui ne pourra offrir un intérêt que pour un intervalle de temps borné.

Chapitre V - Problème non linéaire, non stationnaire sur la droite, dans l'espace $\mathcal{B}_r\ (L^2(R) \cap L^\infty(R))$

Le problème non linéaire a, jusqu'a maintenant, été étudié pour des domaines bornés par Guiraud [25] et Pa·· [3[] .
Nous supposons que l'intervalle de temps est ici borné, et nous exploitons largement les résultats du chapitre IV, qui, conjointement aux majorations obtenues par Gard pour le terme non linéaire, permettent de résoudre le problème par itération, ceci pour une valeur initiale convenablement liée à l'amplitude de l'intervalle de temps considéré. Une étude de la régularité pour les variables de temps et d'espace est faite.

Equation de Boltzmann linéaire stationnaire sur la droite

Le problème consiste à étudier pour les valeurs de la variable x de la droite réelle R l'existence de l'élément f satisfaisant à :

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|)\, f - A f = g \quad ,$$

f étant cherchée dans l'espace fonctionnel $L^2(R,H)$ des éléments de H dont la norme est dans $L^2(R)$, c'est-à-dire l'espace des fonctions de x et $\vec{\xi}$ défini à partir de H par le produit scalaire et la norme notés respectivement :

$$((h,g)) = \int_R (h(x,\vec{\xi}) \ , \ g(x,\vec{\xi}))_H \, dx \ ,$$

$$|||h|||^2 = \int_R ||h(x,\vec{\xi})||_H^2 \, dx$$

Seul le cas où le second membre $g(x,\vec{\xi})$ est élément de $L^2(R,H)$, et est , dans cet espace orthogonal aux cinq invariants des rencontres $\psi^{\alpha}(\vec{\xi})$ sera étudié entièrement . Cette dernière hypothèse sur $g(x,\vec{\xi})$ est justifiée par la propriété que possède le terme non linéaire $Q(f,f)$ de l'équation de Boltzmann non linéaire .

1 - Résolution du problème intermédiaire $\mathcal{M} f = \phi$

Posons $\mathcal{M} = \xi \frac{\partial}{\partial x} \ . \ + \nu(|\vec{\xi}|)$.

Il est utile pour la suite de l'étude de savoir inverser l'opérateur $\mathcal{M}$, et d'en connaître les domaine et image , de même pour son adjoint que nous noterons $\mathcal{M}^*$.

Résolvons tout d'abord l'équation différentielle en x ,

$$\xi \frac{df}{dx} + \nu(|\vec{\xi}|)\, f = \phi \ ,$$

pour un élément $\phi(x)$ régulier dépendant du paramètre $\vec{\xi}$, c'est-à-dire par exemple appartenant à l'espace Δ des fonctions à support compact en x , nulles pour $|\vec{\xi}|$ assez grand , et continues en x , dépendant continuement de $\vec{\xi}$, et dont la dérivée en x possède ces mêmes propriétés .

La résolution alors classique conduit à l'expression suivante , pour laquelle il a fallu distinguer les cas $\xi > o$ et $\xi < o$; définissons $\mathcal{E}(x,\vec{\xi})$ par :

$$\mathcal{E}(x,\vec{\xi}) = \varepsilon \gamma(\varepsilon x) \quad \xi^{-1} \quad \exp\left\{ - \frac{\nu(|\vec{\xi}|)}{\xi} x \right\}$$

où ε vaut 1 pour les valeurs positives de ξ , et -1 pour ses valeurs négatives , et $\gamma(.)$ désigne la fonction d'Heavyside .

La solution s'exprime alors sous forme du produit de convolution portant sur la variable x , pour chaque $\vec{\xi}$:

$$f(.,\vec{\xi}) = \mathcal{E}(.\ \vec{\xi}) * \phi(.,\vec{\xi}) \quad , \text{ que nous noterons}$$

par la suite :

$f = U\ \phi$, où U est l'opérateur réalisant l'inverse de l'opérateur $\mathcal{M}_\phi$ dans Δ , c'est-à-dire vérifie dans Δ les relations

$$\mathcal{M}\ U = U\mathcal{M} = I \ .$$

L'opérateur U applique l'espace Δ dans l'espace des fonctions à support compact en $\vec{\xi}$, et nulles pour les valeurs infinies de la variable x .

Après avoir inversé $\mathcal{M}$ dans Δ , envisageons ce problème dans l'espace $L^2(R,H)$: Il est en effet classique de démontrer , par les procédés de troncature et régularisation , que l'espace Δ est dense dans $L^2(R,H)$.

La forme particulière de l'opérateur U permet d'établir la majoration suivante dans l'espace $L^2(R,H)$ (qui est conséquence immédiate de la majoration du produit de convolution dans $L^2(R)$) .

$$|||\ U\phi\ ||| \leq |\mathcal{E}|_{L_1}\ |||\phi|||$$

où $|\mathcal{E}|_{L^1} = \int_o^\infty |\xi|^{-1} \exp\left\{ \frac{-\nu(|\vec{\xi}|)}{|\xi|} x \right\} dx \leq \nu(|\vec{\xi}|)^{-1}$

$$\leq \nu(o)^{-1} \ ,$$

la dernière majoration étant une propriété de la fréquence de collision $\nu(|\vec{\xi}|)$: $\nu(|\vec{\xi}|) \geqslant \nu(o) > o$

Ceci conduit à prolonger l'opérateur U par continuité à l'espace $L^2(R,H)$ tout entier . Nous noterons encore U son extension , et il s'en suit que , dans $L^2(R,H)$, les opérateurs $\mathcal{U}$ et $\mathcal{M}$ vérifient $\mathcal{M}\,U = I$, et les propriétés de U sont alors résumées dans la proposition suivante :

Proposition I.1.1

L'opérateur U vérifie dans $L^2(R,H)$ la relation $\mathcal{M}\,U = I$. U est un opérateur borné par $\nu(o)^{-1}$ de $L^2(R,H)$ dans lui-même , $\nu(|\vec{\xi}|)\,U$ est borné par 1 dans $L^2(R,H)$ et $\xi \frac{\partial}{\partial x}\,U$ est borné par 2 dans $L^2(R,H)$

La même étude peut être refaite pour le problème adjoint au sens de $L^2(R,H)$: $\mathcal{M}^* f = \phi$, où $\mathcal{M}^* = -\xi \frac{\partial}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|)$.

L'inverse dans Δ , noté U^* , est l'adjoint de U dans $L^2(R,H)$.

Etudions maintenant les domaines V et V^* de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^*$ respectivement dans l'espace $L^2(R,H)$, ainsi que le dual de chacun de ces deux domaines , ceci afin de préciser en quel sens plus général les opérateurs U et U^* sont inverses des opérateurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^*$.

Définition de V domaine de $\mathcal{M}$ dans $L^2(R,H)$.

$$V = \{ f \mid \exists\, \phi(x,\vec{\xi}) \in L^2(R,H) \quad , \quad f = U\phi \}$$

Normons cet espace vectoriel par :

$$|f|_V = \{ |||f|||^2 + |||\mathcal{M} f|||^2 \}^{1/2}$$

Notons tout d'abord que Δ est inclu dans V , et montrons que Δ est dense dans V : soit un élément f de V , la densité de Δ dans $L^2(R,H)$ permet d'approcher dans $L^2(R,H)$ l'élément $\phi = \mathcal{M} f$ de $L^2(R,H)$ par une suite ϕ_n d'éléments de Δ , et définissons $\mathcal{E}_m$ par :

$$\mathcal{E}_m(x,\vec{\xi}) = \varepsilon\, \gamma(\varepsilon x)\quad \xi^{-1} \exp\{ - \frac{\nu(|\vec{\xi}|)}{\xi} x \}\, \gamma(m - |x|) \quad .$$

Considérons alors la suite

$f_{m,n} = \mathcal{E}_m * \phi_n$ d'éléments de Δ ; elle converge quand $m \to \infty$ dans $L^2(R,H)$ vers $f_n = U\phi_n$, suite qui , étant donnée la convergence de ϕ_n vers ϕ , converge vers l'élément $U\phi$. Pour $2m$ supérieur au diamètre du support de ϕ_n , la démonstration directe montre que $f_{m,n}$ converge vers ϕ_n quand $m \to \infty$, et la suite $f_{m,n}$ réalise bien l'approximation de f dans V .

La majoration évidente $|||f||| \leq |f|_V$ montre que :

Lemme I.1.1.

Le domaine V de $\mathfrak{M}$ dans $L^2(R,H)$ est dense dans $L^2(R,H)$, et l'injection de V dans $L^2(R,H)$ est continue .

Lemme I.1.2.

L'espace V est complet pour la norme $|f|_V = \{|||f|||^2 + |||\mathfrak{M}f|||^2\}^{1/2}$

Prenons en effet une suite de Cauchy f_n dans V : c'est aussi une suite de Cauchy dans $L^2(R,H)$, et la suite $\phi_n = \mathfrak{M}f_n$ est elle aussi une suite de Cauchy dans $L^2(R,H)$, qui de ce fait converge vers un élément ϕ de $L^2(R,H)$. f_n converge alors dans V vers l'élément f défini par $f = U\phi$.

La définition du domaine V^* de $\mathfrak{M}^*$ dans $L^2(R,H)$ est parallèle :

$$V^* = \{ f \mid \exists\, \phi(x,\vec{\xi}) \in L^2(R,H) \ , \ f = U^*\phi \} \ ,$$

$$|f|_{V^*} = \{ |||f|||^2 + |||\mathfrak{M}f|||^2 \}^{1/2} \ .$$

Lemme I.1.3.

Les espaces V et V^* sont confondus .

En effet , si f est dans V , il est de la forme $f = U\phi$, et la proposition I.1.1. montre que $\xi \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\nu(|\vec{\xi}|)f$ sont chacun dans $L^2(R,H)$, et f appartient de ce fait au domaine de $\mathfrak{M}^*$ dans $L^2(R,H)$, et inversement d'ailleurs .

Les topologies définies par $|f|_V$ et $|f|_{V^*}$ sont identiques , il suffit d'établir les relations immédiates :

$$|f|_{V^*} \leq \sqrt{2} \ |f|_V$$
$$|f|_V \leq \sqrt{2} \ |f|_{V^*}$$

Remarquons que dans l'espace V , les opérateurs U et $\mathfrak{M}$ vérifient $U\mathfrak{M} = I$, et de même , dans V^* , $U^*\mathfrak{M}^* = I$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir V' dual de V , dualité qui sera notée par $< \ , \ >_V$. La topologie de V' est la topologie forte du dual

$$|g|_{V'} = \sup_{|h|_V=1} <g \ , \ h>_V .$$

et nous pouvons énoncer :

Lemme I.1.4.

$L^2(R,H)$ est inclu dans l'espace V' , et l'injection de $L^2(R,H)$ dans V' est continue .

Un élément f de $L^2(R,H)$ définit pour tout élément h de V l'application

$h \to ((f,h))$ qui est une forme linéaire continue sur V , étant donnée la majoration évidente

$$((f,h)) \leq |||f||| \ \ |||h|||$$
$$\leq |||f||| \ \ |h|_V .$$

Il existe donc un élément de V' que l'on notera $\tilde{f}$, tel que , pour tout élément h dans V , on ait :

$<\tilde{f} \ , \ h>_V = ((\cdot,h))$, élément qu'il suffit d'identifier avec f . La majoration $|\tilde{f}|_V \ , \leq |||f|||$ achève alors de démontrer notre affirmation .

La même méthode conduit à définir $V^{*\prime}$, dual de V^*, et les propriétés sont les mêmes .

Ceci va autoriser l'extension de $\mathfrak{M}$ à $L^2(R,H)$:

Lemme I.1.5.

L'opérateur $\mathfrak{M}$, élément de $\mathcal{L}(V, L^2(R,H)$ peut être étendu à l'espace $L^2(R,H)$, cette extension est un élément de $\mathcal{L}(L^2(R,H), V^{*\prime})$

Soit un élément h de l'espace V^* ; un élément ϕ de $L^2(R,H)$ définit sur V^* la forme linéaire :

$h \rightarrow ((\phi, \mathfrak{M}^* h))$, qui est une forme linéaire continue sur V^* , en effet :

$$((\phi, \mathfrak{M}^* h)) \leq |||\phi||| \quad |h|_{V^*} \ .$$

Il existe donc un élément X de $V^{*\prime}$ tel que pour tout h dans V^*:

$< X , h >_{V^*} = ((\phi, \mathfrak{M}^* h))$, et posons par définition de l'opérateur $\widetilde{\mathfrak{M}}$:

$X = \widetilde{\mathfrak{M}} \phi$, qui satisfait alors à l'inéquation

$|\widetilde{\mathfrak{M}} \phi|_{V^{*\prime}} \leq |||\phi|||$ pour tout ϕ de $L^2(R,H)$.

Montrons maintenant que $\widetilde{\mathfrak{M}}$, opérateur de $L^2(R,H)$ dans $V^{*\prime}$ réalise le prolongement de $\mathfrak{M}$ à $L^2(R,H)$, autrement dit , qu'il coïncide avec $\mathfrak{M}$ sur V :
Prenons un élément ϕ de V , donc de la forme $\phi = U\psi$, où ψ est dans $L^2(R,H)$:

$$\begin{aligned} < \widetilde{\mathfrak{M}} \phi , h >_{V^*} &= ((\phi, \mathfrak{M}^* h)) \\ &= ((U\psi, \mathfrak{M}^* h)) \\ &= ((\psi , h)) \ , \end{aligned}$$

et cette forme linéaire continue sur V^* n'est autre que $\psi = \mathfrak{M}\phi$.

Nous noterons toujours $\mathfrak{M}$ cette extension $\widetilde{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ à $L^2(R,H)$. Procédons maintenant à l'étude correspondante de l'opérateur U , et établissons le lemme suivant :

Lemme I.1.6.

> L'opérateur U , élément de $\mathcal{L}(L^2(R,H) , V)$ peut être étendu à l'espace $V^{*\prime}$, et son extension est un élément de $\mathcal{L}(V^{*\prime} , L^2(R,H))$.

Soit un élément X de $V^{*\prime}$, l'application :

$g \rightarrow < X , U^* g >_{V^*}$ est une forme linéaire continue sur $L^2(R,H)$, en effet :

$$< X , U^* g)_{V^*} < |X|_{V^*} , \ \{ 1 + \frac{1}{\nu(o)^2} \}^{1/2} |||g||| \ .$$

Il existe alors un élément de $L^2(R,H)$ que l'on notera

$\tilde{U}\,X$ tel que pour tout g de $L^2(R,H)$, on ait :

$$< X , U^* g >_{V^*} = ((\tilde{U}\,X, g)) .$$

Montrons maintenant que cet opérateur $\tilde{U}$ de $V^{*\prime}$ dans $L^2(R,H)$ coïncide avec U sur $L^2(R,H)$: La propriété selon laquelle on a $\mathfrak{M}U = I$ dans $L^2(R,H)$ permet d'écrire $X = \mathfrak{M}U\,X$ pour tout X de $L^2(R,H)$, de même $I = \mathfrak{M}^* U^*$, soit :

$$< \mathfrak{M}\,U\,X, U^* g >_{V^*} = ((UX, \mathfrak{M}^* U^* g))$$

$$= ((UX, g)) \quad . \text{ Identifions } U \text{ et } \tilde{U} .$$

Par ailleurs U est borné de $V^{*\prime}$ dans $L^2(R,H)$:

$$|||UX||| = \sup_{|||g|||=1} < X, U^* g >_{V^*}$$

$$< |X|_{V^*} , \left\{ 1 + \frac{1}{\nu(o)^2} \right\}^{1/2}$$

Les raisonnements précédents se calquent pour les opérateurs $\mathfrak{M}_o^*$ et U^* .

Prpposition I.1.2.

$U\mathfrak{M} = I$ dans $L^2(R,H)$

Prenons un élément f de $L^2(R,H)$. Le lemme I.1.5. montre que $\mathfrak{M}f$ est un élément de $V^{*\prime}$, et le lemme I.1.6. que $U\mathfrak{M}f$ est dans $L^2(R,H)$.

$$< \mathfrak{M} f, U^* h >_{V^*} = ((U\mathfrak{M}f, h)) \quad \text{d'une part, et :}$$

$$= ((f, \mathfrak{M}^* U^* h)) \quad \text{d'autre part .}$$

Dans $L^2(R,H)$, $\mathfrak{M}^* U^* = I$. Il en est donc de même de $U\mathfrak{M}$, la propriété ayant lieu pour tout h de $L^2(R,H)$: $((f,h)) = ((U\mathfrak{M}f,h))$.

Proposition I.1.3.

$\mathfrak{M}U = I$ dans $V^{*\prime}$

Soit un élément f de $V^{*\prime}$, $U f$ est alors élément de $L^2(R,H)$, et $\mathfrak{M}Uf$ de $V^{*\prime}$. Pour tout h de V^*, on a :

$$< \mathfrak{M}U\, f, h >_{V^*} = ((Uf, \mathfrak{M}^* h))$$

$$= < f, U^* \mathfrak{M}^* h >_{V^*} .$$

Le fait que , dans V^*, on ait $U^* \mathfrak{M}^* = I$ démontre la proposition .

Les propriétés de $\mathcal{M}$ et U d'une part , et $\mathcal{M}^*$, U^* d'autre part , se résument alors comme suit :

Dans $L^2(R,H)$	: $\mathcal{M}U = U\mathcal{M} = I$; $\mathcal{M}^* U^* = U^* \mathcal{M}^* = I$.
Dans $V^{*\prime}$	: $\mathcal{M}U = I$. ; Dans V' : $\mathcal{M}^* U^* = I$
Dans V	: $U\mathcal{M} = I$; Dans V^* : $U^*\mathcal{M}^* = I$

La remarque selon laquelle V et V^* sont confondus n'a pas été employée ici , elle aurait été source de confusions .

2. Equation intégrale associée au problème : $\mathcal{M}f - Af = g$.

Le paragraphe précédent montre que l'on peut se ramener à la résolution de l'équation intégrale :

(E) $\qquad f - UAf = Ug$,

où Ug est alors un élément de V .

Il est aisé de montrer que dans $L^2(R,H)$ l'équation homogène $f - UAf = 0$, n'a que la solution nulle . Nous serons amenés , dans la suite , à faire une démosntration analogue , avec cependant quelques difficultés supplémentaires .

L'opérateur A est borné et compact dans l'espace H , et l'opérateur UA est borné dans $L^2(R,H)$, mais n'est pas compact : les grandes valeurs de la variable x intervenant dans l'intervalle d'intégration du produit de convolution sont responsables de cette non compacité . Pour cette raison , nous allons être amenés à introduire une équation déduite de l'équation intégrale (E) précédente , par troncature aux valeurs de x supérieures en valeurs absolue à un réel positif N , soit (E_N) cette nouvelle équation que nous allons définir .

Le schéma de la démonstration , et le passage de l'équation (E_N) et de sa solution dans $L^2(R,H)$ notée f_N , à l'équation (E) quand $N \to \infty$ sera alors indiqué .

3. Equation modifiée (E_N)

Désignons par P_N l'opérateur de troncature à $|x| < N$, c'est-à-dire , qui, a une fonction f de la variable x, associe :

$$P_N f = f \quad \text{pour} \quad |x| < N$$
$$= o \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant N \quad ,$$

et soit Q_N le complémentaire de P_N à l'identité , soit :

$$Q_N f = f \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant N$$
$$= o \quad \text{pour} \quad |x| < N \quad ,$$

et étudions l'existence dans $L^2(R,H)$ d'un élément noté f_N , solution de :

$$\mathcal{M} f_N - A\, P_N\, f_N = g \quad , \text{ ou encore , sous forme intégrale}$$

(E_N) $$f_N - U\, A\, P_N\, f_N = Ug \ .$$

Il est à noter que P_N et Q_N commutent avec A , ce dernier étant indépendant de x .

L'opérateur de collision linéarisé $L = \nu(|\vec{\xi}|) - A$ figurant dans le problème $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + Lf = g$, donne lieu à l'opérateur "tronqué en partie ", défini par

$$L_N = \nu(|\vec{\xi}|) - A\, P_N$$

Ce sont les propriétés de L_N conséquences immédiates des propriétés de L qui permettront d'établir tout d'abord l'unicité de la solution f_N de l'équation (E_N) dans $L^2(R,H)$.

Nous montrerons ensuite que l'opérateur $U\, A\, P_N$ est compact dans $L^2(R,H)$, et l'existence d'une solution de (E_N) unique dans $L^2(R,H)$ sera alors établie .

Le problème de la convergence de cette solution f_N quand N tend vers l'infini restera à traiter : il conviendra de considérer séparément la composante ψ_N de f_N sur le sous-espace de H invariant des rencontres , et sa composante X_N orthogonale dans H à ψ_N . Cette convergence sera étudiée pour une sous-suite , et conduira au théorème d'existence suivant , pour lequel nous rappelons la décomposition de H :

L'espace H est somme directe des deux sous-espaces suivants :

- le noyau de l'opérateur de collision linéairsé L, de dimension 5, dont nous prendrons pour base les cinq invariants des rencontres classiques $\psi^{\alpha}(\vec{\xi})$, où α prend les valeurs 0 à 4,

- le sous-espace qui lui est orthogonal

Notons $\mathcal{P}$ l'opérateur de projection de H sur le sous-espace noyau de L, invariant des rencontres, espace que nous noterons alors $\mathcal{P}H$. Nous noterons

$\psi(x, \vec{\xi}) = \mathcal{P}f$ la projection de f sur celui-ci.

Définissons $\mathcal{Q}$ par : $\mathcal{Q} = 1 - \mathcal{P}$ qui projette alors H sur le sous-espace orthogonal à $\mathcal{P}H$, soit $\mathcal{Q}H$ celui-ci, et notons par

$\chi(x, \vec{\xi}) = \mathcal{Q}f$.

Nous en déduisons les espaces notés $\mathcal{P}L^2(R,H)$ et $\mathcal{Q}L^2(R,H)$ les sous-espaces de $L^2(R,H)$ correspondant à décomposition précédente ; la décomposition d'un élément $f(x, \vec{\xi})$ de $L^2(R,H)$ se présente sous l'une des formes :

$$f(x, \vec{\xi}) = \psi(x, \vec{\xi}) + \chi(x, \vec{\xi})$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{4} a_{\alpha}(x)\, \psi_{\alpha}(\vec{\xi}) + \chi(x, \vec{\xi}) ,$$

où $a_{\alpha}(x)$ sont des éléments de $L^2(R)$.

On pourra utiliser la notation :

$$\psi_{\alpha}(x, \vec{\xi}) = a_{\alpha}(x)\ \psi_{\alpha}(\vec{\xi}) .$$

Enonçons le théorème suivant, dont la démonstration va constituer le reste de ce chapître :

Théorème

Soit un élément $g(x, \vec{\xi})$ du sous-espace $\mathcal{Q}L^2(R,H)$, possédant une symétrie cylindrique pour la variable $\vec{\xi}$, d'axe ξ. Il existe un élément $f(x, \vec{\xi})$ de $L^2(R,H)$ qui admet la décomposition :

$f(x, \vec{\xi}) = a_o(x)\, \psi_o(\vec{\xi}) + a_4(x)\, \psi_4(\vec{\xi}) + \chi(x, \vec{\xi})$, satisfaisant au sens fort dans $L^2(R,H)$ l'équation :

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|)\, f - Af = g ,$$

et tel que $\nu(\vec{\xi})\, \chi(x, \vec{\xi})$ soit dans $L^2(R,H)$.

Cette solution est unique dans $L^2(R,H)$

4. Unicité de la solution de (E_N) dans $L^2(R,H)$

Rappelons que l'opérateur $L = \nu(|\vec{\xi}|) - A$ vérifie la majoration suivante, dans l'espace H, pour une constante μ strictement positive :

$$(1) \qquad (Lf,f)_H \geqslant \mu \, ||Qf||_H^2$$

Il sera utile pour la démonstration de l'unicité de chercher dans quelle mesure l'opérateur L_N a gardé cette propriété :

Lemme I.4.1.

L'opérateur L_N vérifie, pour tout x de R, l'inégalité :

$$(2) \qquad (L_N f,f)_H \geqslant \mu_1 \, ||Qf||_H^2 , \qquad \mu_1 = \inf(\mu,\nu(o)) .$$

Pour les valeurs de $|x|$ inférieures à N, l'identité entre L_N et L montre qu'alors :

$$\begin{aligned} (L_N f,f)_H &= (Lf,f)_H \\ &\geqslant \mu \, ||Qf||_H^2 , \end{aligned}$$

tandis que pour les valeurs $|x| \geqslant N$, $L_N f$ se réduit à $\nu(|\vec{\xi}|)\, f$, et

$$\begin{aligned} (L_N f,f)_H &= (\nu(\vec{\xi})f,f)_H \\ &\geqslant \nu(o) \, ||f||_H^2 \\ &\geqslant \nu(o) \, ||Qf||_H^2 . \end{aligned}$$

Proposition I.4.1.

L'équation $f - U A P_N f = o$ n'a dans $L^2(R,H)$ qua la solution nulle.

Un élément f de $L^2(R,H)$ vérifiant l'équation (E_N) homogène, $f - U A P_N f = o$, est dans l'espace V, en effet $AP_N f$ est dans $L^2(R,H)$ et $U A P_N f$ est alors dans V.

Toute solution de $f = U A P_N f$ élément de $L^2(R,H)$ vérifie donc, dans $L^2(R,H)$, la relation :

(3) $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + L_N f = o$, qui a pour conséquence :

$$((\xi \frac{\partial f}{\partial x} , f)) + ((L_N f, f)) = o .$$

Notons $\phi(x, \vec{\xi})$ l'élément de $L^2(R,H)$ défini par :

$\phi(x, \vec{\xi}) = A P_N f$, et cherchons à quelles conditions on a alors $f = U\phi$.

Approchons dans $L^2(R,H)$ l'élément $\phi(x, \vec{\xi})$ par une suite $\phi_\varepsilon(x, \vec{\xi})$ d'éléments réguliers à support compact , quand $\varepsilon \to o$, et définissons : $f_\varepsilon = U\phi_\varepsilon$; cherchons donc à quelles conditions f_ε ainsi défini converge vers f quand $\varepsilon \to o$, les propriétés de U impliquent en effet que $U\phi_\varepsilon$ converge vers $U\phi$ dans l'espace V quand $\varepsilon \to o$. D'autre part $\xi \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}$ converge alors vers $\xi \frac{\partial f}{\partial x}$ dans $L^2(R,H)$, et , si f_ε converge vers f ,

$$((\xi \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}, f_\varepsilon)) \text{ converge vers } ((\xi \frac{\partial f}{\partial x} , f)) .$$

$$\text{Or , } ((\xi \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} , f_\varepsilon)) = \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} \{(\xi f_\varepsilon , f_\varepsilon)_H\}_{x=-B}^{x=A}$$

La forme de f_ε permet d'appliquer le résultat suivant démontré en annexe (A.1)

$(\xi f_\varepsilon, f_\varepsilon)_H \longrightarrow o$ quand $|x| \to \infty$, d'où :

$((\xi \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} , f_\varepsilon)) = o$, et il en est alors de même pour f :

$$((\xi \frac{\partial f}{\partial x} , f)) = o .$$

Tenant alors compte de l'équation (3) vérifiée par f , on en déduit $((L_N f, f)) = o$, équation qu'il convient de détailler .

$$((L_N f, f)) = \int_{|x|>N} (\nu(|\vec{\xi}|) f, f)_H \, dx + \int_{|x|<N} (I f, f)_H \, dx$$

chacun des termes étant positif , $((L_N f, f)) = o$ montre que

a) $(\nu(|\vec{\xi}|) f, f)_H = o$ pour $|x| > N$, soit $Q_N f = o$ dans $L^2(R,H)$

b) $(Lf, f)_H = o$ pour $|x| < N$, soit $P_N Q f = o$ dans $L^2(R,H)$,

c'est-à-dire $L_N f = 0$, et la solution f de $f = UAP_N f$ vérifie alors $\xi \frac{\partial f}{\partial x} = o$ dans $L^2(R,H)$. f étant nulle d'après ce qui précède , pour $|x| > N$, on en déduit que f est nulle dans $L^2(R,H)$.

5 - Compacité de l'opérateur UAP_N dans $L^2(R,H)$

Pour montrer la compacité de l'opérateur UAP_N , nous aurons besoin de l'intermédiaire suivant , afin d'éliminer la singularité de l'opérateur U en $\xi = o$:

Soit δ_θ la fonction caractéristique de l'ensemble Θ_θ des $\vec{\xi}$ tels que $|\xi| > \theta$, et considérons l'opérateur

$$\delta_\theta \, UAP_N \quad , \quad \text{pour} \quad \theta > o$$

Nous allons montrer que ce dernier opérateur est compact : pour plus de commodité , nous établirons que son adjoint est compact , ceci en utilisant la propriété qu'ont les opérateurs compacts de transformer une suite faiblement convergente en suite fortement convergente (cf. Dunford Schwartz . Chap. VI § 5) .

Pour en déduire la compacité de l'opérateur UAP_N , on appliquera le lemme 3 , chap. VI Dunford-Schwartz , selon lequel une suite d'opérateurs compacts, convergeant uniformément en norme , converge vers un opérateur compact ; montrons donc tout d'abord cette convergence :

Lemme I.5.1.

$$|||\delta_\theta \, UAP_N f - UAP_N f|||^2 < C\sqrt{\theta}\,|||f|||^2$$

$$|||\delta_\theta \, U\phi - U\phi|||^2 \leq \int_{\Theta_\theta} d\vec{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, [\xi(x,\vec{\xi}) * \phi(x,\vec{\xi})]^2$$

$$\leq \int_{\Theta_\theta} d\vec{\xi} \; \nu(|\vec{\xi}|)^{-2} \, ||\phi(x,\vec{\xi})||^2_{L^2(R)}$$

$$\leq |||\phi|||\, \{ \int_{\Theta_\theta} ||\phi||^2_{L^2(R)} \, \nu(|\vec{\xi}|)^{-4} \, d\vec{\xi} \}^{1/2}$$

Cette dernière inégalité va nous permettre de tenir compte des propriétés de l'opérateur A démontrées par H. Grad , en particuliers :

$$(4) \qquad \max_{\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3} \|A f\|_{L^2(R)} \leq k \, |||f|||.$$

Remplaçons en effet $\phi(x, \vec{\xi})$ par $Af(x, \vec{\xi})$. Nous pouvons faire sortir de l'intégrale $\|Af\|_{L^2(R)}$:

$$|||\delta_\theta \, UAP_N f - UAP_N f|||^2 \leq k \, |||Af||| \, |||f||| \left\{ \int_{\Theta_\theta} \nu(|\vec{\xi}|)^{-4} d\vec{\xi} \right\}^{1/2}$$

Il reste alors à évaluer :

$$\int_{\Theta_\theta} \nu(|\vec{\xi}|)^{-4} d\vec{\xi} \leq \int_{-\theta}^{+\theta} d\xi \int_{R^2} \frac{d\eta \, d\zeta}{\{a[1 + (\eta^2 + \zeta^2)^{1/2}]\}^4}$$

$$\leq \theta . C_1^2 \qquad \text{où} \qquad C_1^2 = 2 \int_{R^2} \frac{d\eta \, d\zeta}{a^4 [1 + (\zeta^2 + \eta^2)^{1/2}]^4}$$

On prendra $\cdot = C_1 \, |||A||| \, k$.

Il est à remarquer que, dans cette étape , la majoration (4) concernant l'opérateur A est fondamentale . Dans l'étape suivante (démonstration de la compacité de $\delta_\theta \, UAP_N$) , c'est par contre la compacité de A dans H qui conduira au résultat .

Lemme I.5.2.

L'opérateur $\delta_\theta \, UAP_N$ est compact dans $L^2(R,H)$.

Comme nous l'avons annoncé , nous allons montrer que son adjoint , c'est-à-dire $A \, P_N \, \delta_\theta \, U^*$ est compact (A est en effet auto-adjoint dans H , de même pour δ_θ , et P_N est auto-adjoint dans $L^2(R)$) . Ceci a pour but de tirer parti de la compacité de A dans H au maximum, d'une part , et d'autre part de faire intervenir le fait que l'intervalle de variation de x est borné , à N fixé .

Prenons une suite d'éléments f_n de $L^2(R,H)$ convergeant faiblement vers f dans $L^2(R,H)$, et montrons que $AP_N \, \delta_\theta \, U^* f_n$ converge alors fortement vers $A \, P_N \delta_\theta \, U^* f$ dans $L^2(R,H)$, de la manière suivante :

a) Si f_n converge faiblement dans $L^2(R,H)$ vers f , la suite $\delta_\theta \, U^* f_n$ converge faiblement pour tout x fixé , vers

$\delta_\theta U^* f$, ceci dans l'espace H :

Prenons un élément ϕ de H , et formons :

$$(\delta_\theta U^*(f_n - f) , \phi)_H = \int_{R^3} d\vec{\xi}\ \delta_\theta(\vec{\xi}) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x-y, \vec{\xi})\ (f_n(y,\vec{\xi}) - f(y,\vec{\xi}))\, dy$$

$$= ((f_n - f, \Phi_x)) \quad , \text{ où}$$

$$\Phi_x(y, \vec{\xi}) = \delta_\theta(\vec{\xi})\ \phi(\vec{\xi})\ \mathcal{G}(x-y, \vec{\xi}) .$$

Il reste donc, pour démontrer a), à prouver que pour tout x , la fonction Φ_x des variables y et $\vec{\xi}$ appartient à l'espace $L^2(R,H)$:

$$|||\Phi_x(y, \vec{\xi})|||^2 \leq \int_{R^3} d\vec{\xi}\ \ \delta_\theta(\vec{\xi})\ \phi^2(\vec{\xi}) \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ \mathcal{G}(x-y, \xi)^2$$

$$\leq \int_{R^3} d\vec{\xi}\ \ \delta_\theta(\vec{\xi})\ \phi^2(\vec{\xi})\ \ \frac{1}{2\,\xi\,\nu(|\vec{\xi}|)}$$

$$\leq \frac{1}{2\theta\,\nu(o)}\ \ ||\phi||_H^2$$

Et c'est ici que nous voyons apparaître la raison pour laquelle nous avons introduit l'opérateur δ_θ . Passons maintenant à l'étape suivante :

b) Appliquons l'opérateur A , compact dans H :

Pour tout x , la suite $A\,\delta_\theta\,U^*(f_n - f)$ converge fortement vers zéro dans l'espace H .

L'intervalle (-N, +N) étant borné , on en déduit que

$$\int_{-N}^{+N} ||A\,\delta_\theta\,U^*(f_n - f)||_H^2\ dx \longrightarrow o \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

ce qui achève la démonstration .

Théorème 1.5.

Soit $g(x, \vec{\xi})$ un élément de $L^2(R,H)$

L'équation $m_N f_N - A P_N f_N = g$ admet une solution unique

dans $L^2(R,H)$, qui est solution forte du problème dans $L^2(R,H)$

L'existence de la solution dans $L^2(R,H)$ de l'équation $(1 - UAP_N)\, f_N = U\varphi$ est une conséquence de la compacité de UAP_N .

Les propriétés de U et A montrent que $UAP_N f_N$ et $U\varphi$ sont des éléments de V , et il en est alors de même de f_N , et la solution de l'équation intégrale (E_N) est aussi solution dans $L^2(R,H)$ fort de $\mathcal{A} f_N - AP_N f_N = U_g$.

Il s'agit maintenant de passer du problème modifié au problème initialement posé .

Afin d'étudier la convergence de $f_N(x, \vec{\xi})$ quand N tend vers l'infini , nous utiliserons la décomposition de f_N sur $\mathcal{P} L^2(R,H)$ et $\mathcal{Q} L^2(R,H)$:

$$f_N(x, \vec{\xi}) = \psi_N(x, \vec{\xi}) + \chi_N(x, \vec{\xi})$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{4} c\alpha_N(x)\, \psi_\alpha(\vec{\xi}) + \chi_N(x, \vec{\xi}) .$$

Les convergences n'auront lieu souvent que pour une suite de réels , mais ceci suffira pour montrer l'existence .

Jusqu'ici , le fait que $g(x, \vec{\xi})$ appartienne au sous-espace $\mathcal{Q} L^2(R,H)$ n'a encore joué aucun rôle : cette hypothèse va être exploitée pour donner lieu à des majorations à priori fondamentales.

6. Convergence de $f_N(x, \vec{\xi})$ quand $N \to \infty$

Lemme I.6.1.

Si g appartient à $\mathcal{Q} L^2(R,H)$, $|||\mathcal{Q} f_N||| \leq |\lambda_1|^{-1} |||g|||$.

L'élément f_N étant de la forme $f_N = U(AP_N f_N + g)$, le calcul fait en annexe montre que :

$$(\xi\, f_N\, ,\, f_N)_H \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |x| \to \infty .$$

De l'équation $\xi \frac{\partial f_N}{\partial x} + L_N f_N = g$, on déduit :

$$((\xi \frac{\partial f_N}{\partial x} , f_N)) = o \ , \quad ((g,f_N)) = ((g, \chi_N)) \ , \text{ et}$$

$((L_N f_N, f_N)) > \mu_1 |||\chi_N|||^2$, il vient alors :

$$\mu_1 |||\chi_N|||^2 \leq |||g||| \ |||\chi_N||| \ , \text{ d'où le résultat}$$

$$|||\chi_N||| \leq |||g||| \ \mu_1^{-1} \tag{5}$$

Proposition I.6.1

Il existe une suite de réels N_K telle que χ_{N_K} converge faiblement dans $L^2(R,H)$. Cette limite appartient à $\mathcal{Q}L^2(R,H)$ et sera notée $\chi(x, \vec{\xi})$

Il suffit de tirer les conséquences de la majoration précédente : rappelons en effet que $L^2(R,H)$ est réflexif , un sous-ensemble est alors faiblement séquentiellement compact si et seulement si il est borné (cf. Dunford Schwartz . Chap. II . § 3) .

Le fait que la limite faible de χ_{N_K} soit dans $\mathcal{Q}L^2(R,H)$ résulte de la continuité de l'opérateur $\mathcal{Q}$. La démonstration à l'aide des suites est d'autre part triviale .

Corollaire 1.6.1.

Pour une sous suite N_K extraite de la suite précédente , $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} \chi_N$ converge vers $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} \chi$ dans $L^2(R,H)$ faible .

Montrons tout d'abord que la suite $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} \chi_N$ est aussi bornée dans $L^2(R,H)$. Reprenons la démonstration du lemme I.6.1 , et précisons davantage le terme $((L_N f_N, f_N))$, sachant que χ_N est borné dans $L^2(R,H)$:

$$L_N f_N = P_N L f_N + \nu(|\vec{\xi}|) Q_N f_N$$

$$((L_N f_N, f_N)) = ((P_N L f_N , f_N)) + ((Q_N \nu(|\vec{\xi}|) f_N, f_N))$$

$$\geq \mu |||P_N \chi_N|||^2 + |||\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} Q_N f_N |||^2$$

$$|||\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} Q_N f_N|||^2 \leq |||g||| \; |||\chi_N|||$$

$$\leq |||g|||^2 \; \mu_1^{-1} ,$$

et nous en déduisons une majoration qui va être utilisée pour réécrire $((L_N f_N , f_N))$, et pour étudier $\varphi_N \psi_N$:

(6) $$|||Q_N f_N||| \leq c_1 |||g|||$$

$$L_N f_N = Lf_N - Q_N A f_N$$

Les opérateurs Q_N et A commutent , et , étant donné l'opérateur Q_N , on a :

$$((Q_N A f_N , f_N)) = ((Q_N A f_N , Q_N f_N))$$

$$= ((AQ_N f_N , Q_N f_N)) ,$$

$$\leq |||A||| \; |||Q_N f_N|||^2 ,$$

et $(L_N f_N, f_N)) = ((Lf_N , f_N)) - ((Q_N A f_N , f_N))$

$$= ((g , \chi_N))$$

La comparaison entre ces deux relations conduit à la majoration suivante , après avoir utilisé :

$$((Lf_N , f_N)) = ((L\chi_N , \chi_N))$$

$$= |||\nu(\vec{\xi})^{1/2} \chi_N|||^2 - ((A \chi_N , \chi_N)) ,$$

$$|||\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} \chi_N|||^2 = ((A \chi_N , \chi_N)) + ((g , \chi_N)) + ((A Q_N f_N, Q_N f_N))$$

$$\leq C \; |||g|||^2 ,$$

ceci est une conséquence des diverses majorations obtenues jusqu'alors (5) et (6) .

La conclusion cherchée est :

Il existe une suite N_k extraite de la suite N_K, telle que $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} \chi_{N_k}$ converge dans $L^2(R,H)$ faiblement.

Etudions cette dernière convergence, et montrons qu'elle a lieu vers l'élément $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} \chi$, quand N_k tend vers l'infini.

Rappelons que, pour tout élément ϕ de $L^2(R,H)$, $((\chi_{N_k} - \chi, \phi))$ converge vers zéro quand N_k tend vers l'infini.

Les éléments $\nu(|\vec{\xi}|)^{-1/2} \phi$ et $\nu(\vec{\xi})^{1/2} \chi$ étant dans $L^2(R,H)$, on peut écrire :

$$((\chi_{N_k}, \phi)) = ((\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} \chi_{N_k}, \nu(|\vec{\xi}|)^{-1/2} \phi)),$$

et cette expression converge, d'après ce que nous venons de voir, vers $((\psi, \nu(|\vec{\xi}|)^{-1/2} \phi))$, où ψ est la limite faible dans $L^2(R,H)$ de $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} \chi_{N_k}$.

Comparons les deux limites, pour tout ϕ de $L^2(R,H)$

$((\chi, \phi)) = ((\psi \quad \nu(|\vec{\xi}|)^{-1/2} \phi))$,

ceci montre que $\nu(|\vec{\xi}|)^{-1/2} \psi$ est élément de $L^2(R,H)$ et est égal à χ dans cet espace ; ψ étant dans $L^2(R,H)$ on en déduit aussi que $\nu(\vec{\xi})^{1/2} \chi = \psi$ dans $L^2(R,H)$, ce que nous voulions établir.

Proposition I.6.2.

$Q_N f_N$ converge faiblement vers zéro quand N tend vers l'infini. Il en est de même de $Q_N \psi_N$.

La convergence vers zéro de $Q_N \psi_N$ dans $L^2(R,H)$ sera une conséquence immédiate de la propriété établie pour $Q_N f_N$, (6) l'opérateur $\mathcal{P}$ est en effet continu.

Malgré tout , le résultat qui va nous servir plus loin est uniquement la convergence faible vers zéro de $Q_N \psi_N$.

Au cours de la démonstration du corollaire I.6.1. , nous avons obtenu la majoration (6)

$$|||Q_N f_N||| \leq C_1 |||g||| \quad ;$$

formons , pour tout élément ϕ de $L^2(R,H)$:

$$((Q_N f_N , \phi)) = ((Q_N f_N , Q_N \phi))$$
$$\leq C_1 |||g||| \; |||Q_N \phi|||$$

Or , pour tout ϕ de $L^2(R,H)$, $|||Q_N \phi|||$ tend vers zéro quand N tend vers l'infini ; ceci établit donc la convergence faible vers zéro de $Q_N f_N$, et celle de $Q_N \psi_N$ à fortiori .

Etudions pour la suite extraite N_k quelles conséquences ont les convergences faibles établies jusqu'ici , notamment pour les différents termes de l'équation étudiée :

$$\mathcal{L}_N \chi_N , \quad \xi \frac{\partial \psi_N}{\partial x} .$$

Proposition I.6.3.

La suite $\mathcal{L}_{N_k} \chi_{N_k} = \mathcal{M} \chi_{N_k} - A P_{N_k} \chi_{N_k}$
converge dans $V^{*'}$ vers l'élément $\mathcal{L}\chi$.

Il y a deux propriétés à démontrer ici , d'une part que $\mathcal{L}\chi$ est élément de $V^{*'}$, d'autre part que $\mathcal{L}_{N_k} \chi_{N_k}$ a pour limite dans $V^{*'}$ cet élément $\mathcal{L}\chi$.

Pour un élément ϕ de V^* ,

$((\chi, \mathcal{L}^* \phi)) = ((\chi, \mathcal{M}^* \phi)) - ((\chi, A \phi))$.

L'application $\phi \to ((\chi, \mathcal{L}^* \phi))$ est une forme linéaire continue sur V^* , en effet :

$$((\chi, \mathcal{L}^* \phi)) \leq |||\chi||| \quad (|\phi|_{V^*} + |||A||| \; |||\phi|||)$$

$$\leq (1 + |||A|||) \quad |||\chi||| \quad |\phi|_{V^*} .$$

Il existe donc un élément de $V^{*\prime}$, que l'on notera $\mathcal{L}\chi$, tel que , pour tout ϕ de V^* , on ait :

$$<\mathcal{L}\chi , \phi >_{V^*} = ((\chi, \mathcal{L}^* \phi)) .$$

Etudions maintenant la convergence de $\mathcal{L}_{N_k} \chi_{N_k}$ vers cet élément :

$$<\mathcal{L}_N \chi_N - \mathcal{L}\chi, \phi >_{V^*} = <(\mathcal{M} - AP_N)\chi_N , \phi>_{V^*} - <(\mathcal{M} - A)\chi, \phi >_{V^*}$$

$$= ((\chi_N - \chi, \mathcal{M}^* \phi)) + ((A\chi - AP_N \chi_N , \phi))$$

$$((A\chi_N - AP_N\chi_N, \phi)) = ((A\, Q_N \chi_N, \phi)) = ((\;)_N A\chi_N, Q_N \phi))$$

$$\leq |||A||| \; |||\chi_N||| \quad |||Q_N \phi|||$$

$$\leq k \quad |||g||| \; |||Q_N \phi||| \quad , \text{ ce qui}$$

montre que le lemme $((A\chi_N - AP_N \chi_N , \phi))$ tend vers zéro quand $N \to \infty$. D'autre part , pour la suite N_k , $(\chi_{N_k} - \chi)$ ainsi que $(A\chi_{N_k} - A\chi)$ convergent faiblement verz zéro dans $L^2(R,H)$. Pour cette suite N_k , on en déduit que $\mathcal{L}_{N_k} \chi_{N_k}$ converge vers $\mathcal{L}\chi$ dans $V^{*\prime}$.

Corollaire I.6.2.

$\xi \dfrac{\partial \psi_N}{\partial x}$ converge faiblement dans $V^{*\prime}$ vers $g - \mathcal{L}\chi$

La relation $\mathcal{L}_N f_N = g$ écrite pour la suite N_k , montre que $\mathcal{L}_{N_k} \psi_{N_k} = g - \mathcal{L}_{N_k} \chi_{N_k}$ converge dans $V^{*\prime}$ vers $g - \mathcal{L}\chi$, d'après la proposition précédente . or :

$$\mathcal{L}_{N_k} \psi_{N_k} = \xi \frac{\partial \psi_{N_k}}{\partial x} + A\, Q_{N_k} \psi_{N_k} .$$

La proposition I.6.2. prouve la convergence de $Q_N \psi_N$ vers zéro dans $L^2(R,H)$ faible . A étant borné , la conclusion est immédiate .

Il reste à préciser vers quel élément particulier de V^*, $\xi \frac{\partial \psi_{N_k}}{\partial x}$ converge . Comment l'appartenance de ψ_{N_k} à $\mathcal{S}L^2(R,H)$ est-elle transférée à l'élément limite $g - \mathcal{L}\chi$? De plus , la réponse nous permettra de poursuivre l'étude .

Décomposons $\psi_{N_k}(x, \vec{\xi})$:

$$\psi_{N_k}(x, \vec{\xi}) = \sum_{\alpha=0}^{4} a_{\alpha N_k}(x)\, \psi_\alpha(\vec{\xi}) .$$

Lemme I.6.1.

> Les éléments $\Phi(\vec{\xi})\ \theta(x)$ où :
> $\Phi(\vec{\xi})$, $\xi\,\Phi(\vec{\xi})$, $\nu(|\vec{\xi}|)\ \Phi(\vec{\xi})$ sont éléments de H , et
> $\theta(x)$, $\frac{d\theta(x)}{dx}$ sont éléments de $L^2(R,H)$,
> appartiennent à l'espace V^*.

On peut approcher $\Phi(\vec{\xi})$ dans H et $\theta(x)$ dans $L^2(R)$ par des suites $\Phi_n(\vec{\xi})$ et $\theta_m(x)$ telles que

. $\Phi_n(\vec{\xi})$ et $\theta_m(x)$ soient régulières à supports compacts ,

. $\xi\,\Phi_n(\vec{\xi})$ et $\nu(|\vec{\xi}|)\,\Phi_n(\vec{\xi})$ convergent dans H vers $\xi\,\Phi(\vec{\xi})$ et $\nu(\vec{\xi})\,\Phi(\vec{\xi})$,

. $\frac{d\theta_m(x)}{dx}$ converge vers $\frac{d\theta}{dx}$ dans $L^2(R)$.

La suite $\Phi_n(\vec{\xi})\ \theta_m(x)$ ainsi définie est une suite de V , qui converge dans V vers $\Phi(\vec{\xi})\ \theta(x)$: en effet , $\mathcal{M}\left(\Phi_n(\vec{\xi})\ \theta_m(x)\right)$ converge dans $L^2(R,H)$ vers $\mathcal{M}\left(\Phi(\vec{\xi})\ \theta(x)\right)$.

C'est à l'aide d'éléments de cette forme , où $\Phi(\vec{\xi})$ sera choisi dans H de manière à tenir compte fu fait que ψ_{N_k} est élément de $\mathcal{S}L^2(R,H)$, que nous pourrons déduire la forme de $g - \mathcal{L}\chi$.

Lemme I.6.2.

$\frac{d a^{\alpha}{}_{N_k}(x)}{dx}$ converge dans $\mathcal{H}^{-1}(R)$ vers un élément $A_\alpha(x)$

Rappelons les propriétés suivantes de l'espace $\mathcal{H}^1(R)$ et de son dual $\mathcal{H}^{-1}(R)$, pour lesquelles nous nous sommes rapportés à : Trèves - Linear partial differential equations with constant coefficents . p. 52 .

L'espace $\mathcal{H}^s(R^n)$ est défini pour s réel quelconque , à partir de la transformation de Fourier : C'est l'espace des distributions $u(x)$ tempérées dans R^n , dont la transformée de Fourier $\hat{u}(\eta)$ est de carré intégrable pour la mesure $(1 + |\eta|^2)^s \, d\eta$. Il est normé par :

$$|u|_{\mathcal{H}^s} = \{ \int_{R^n} \hat{u}(\eta)^2 \, (1 + |\eta|^2)^s \, d\eta \}^{1/2}$$

Il est démontré que les espaces $\mathcal{H}^s(R^n)$ et $\mathcal{H}^{-s}(R^n)$ sont duals l'un de l'autre , la forme bilinéaire suivante définit cette dualité :

$$(u,v)_{\mathcal{H}^s} = \int_{R^n} (1 + |\eta|^2)^{s/2} \, \hat{u}(\eta)(1 + |\eta|^2)^{-\frac{s}{2}} \, \hat{v}(\eta) \, d\eta ,$$

et que les distribution de $\mathcal{H}^m(R^n)$ pour m entier positif sont les distributions ayant toutes leurs dérivées , jusqu'à l'ordre m y compris , dans $L^2(R^n)$, la norme :

$$u \longrightarrow \sum_{o \leq |p| \leq m} \{ \int_{R^n} | D^p u(x)|^2 \, dx \}^{1/2} \text{ est équivalente}$$

à la norme $|u|_{\mathcal{H}^m}$, et les distributions de $\mathcal{H}^{-m}(R^n)$ sont les sommes finies de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions de $L^2(R^n)$.

Prenons un élément de V particulier , de la forme

$$\phi_\beta(x, \vec{\xi}) = \xi \, \psi_\beta(\vec{\xi}) \, \theta(x) ,$$

où $\Theta(x)$ est élément de $\mathcal{D}^1(R)$.

$\phi_\beta(x, \vec{\xi})$ satisfait en effet les hypothèses du lemme I.6.1. , et aura dans H un produit scalaire avec $\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$ satisfaisant les propriétés qui seront indispensables pour isoler $\frac{da_{\alpha N_k}}{dx}$ pour chaque α .

Soit Λ la limite dans $V^{*\prime}$ de $\xi \frac{N_k}{\partial x}$ pour l'élément $\phi_\beta(x, \vec{\xi})$ en particulier , nous avons :

$$\lim_{N_k \to \infty} < \sum_{\alpha=0}^{\alpha=4} \xi \psi_\alpha(\vec{\xi}) \frac{da_{\alpha N_k}}{dx} , \phi_\beta(x, \vec{\xi}) >_{V^*} = < \Lambda, \phi_\beta >_{V^*}$$

Pour tout $\phi(x, \vec{\xi})$ élément de V^*, $\nu(|\vec{\xi}|)\phi$ et $\xi \frac{\partial \phi}{\partial x}$ sont dans $L^2(R,H)$. D'autre part , ψ_N est élément de $L^2(R,H)$, et $\mathcal{M}\psi_N$ est élément de $V^{*\prime}$. On a donc d'une part :

$$< \mathcal{M}\psi_N , \phi >_{V^*} = ((\psi_N , \mathcal{M}^* \phi))$$

$$= - ((\psi_N , \xi \frac{\partial \phi}{\partial x})) + ((\psi_N, \nu(|\vec{\xi}|)\phi)) ,$$

et de l'autre :

$$< \mathcal{M}\psi_N , \phi >_{V^*} = < \xi \frac{\partial \psi_N}{\partial x} , \phi >_{V^*} + < \psi_N, \nu(|\vec{\xi}|)\varphi >_{V^*} , \text{ soit}$$

$$- ((\psi_N, \xi \frac{\partial \phi}{\partial x})) = < \xi \frac{\partial \psi_N}{\partial x}, \varphi >_{V^*} ,$$

et ceci va nous permettre de transformer l'expression précédente :

$$< \sum_\alpha \psi_\alpha(\vec{\xi}) \xi \frac{da_{\alpha N}}{dx} , \xi \psi_\beta(\vec{\xi}) \Theta(x) >_{V^*} = -((\sum_\alpha \xi \psi_\alpha(\vec{\xi}) a_{\alpha N} , \xi \psi_\beta(\vec{\xi}) \frac{d\Theta(x)}{dx}))$$

$$= - \sum_\alpha d_{\alpha\beta} (a_{\alpha N}, \frac{d\Theta(x)}{dx})_{L^2(R)}$$

$$= \sum_\alpha d_{\alpha\beta} < \frac{da_{\alpha N}}{dx} , \Theta(x) >_{\mathcal{D}^1(R)}$$

où $d_{\alpha\beta} = (\xi \psi_\alpha(\vec{\xi}) , \xi \psi_\beta(\vec{\xi}))_H$

Il en résulte que , pour la suite N_k ,

$\sum_\alpha d_{\alpha\beta} < \frac{da_{\alpha N_k}}{dx} , \Theta >_{\mathcal{D}^1(R)}$ converge quand N_k tend vers l'infini ,

pour tout élément $\Theta(x)$ de $\mathcal{H}^1(R)$.

Le déterminant formé par les coefficients $d_{\alpha\beta}$ est non nul , (le calcul a été fait en annexe) . On voit ici l'intérêt d'un tel choix de $\phi_\beta(x, \vec{\xi})$, et :

Chacun des termes :

$$< \frac{d a_{\alpha N_k}(x)}{dx} \quad , \quad \Theta(x) >_{\mathcal{H}^1(R)}$$

converge quand N_k tend vers l'infini , et ,

$\frac{d a_{\alpha N_k}(x)}{dx}$ converge alors dans $\mathcal{H}^{-1}(R)$, vers un élément que l'on notera $A_\alpha(x)$

Proposition I.6.4

$\xi \frac{\partial \psi_{N_k}}{\partial x}$ converge dans $V^{*\prime}$ vers $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \xi \psi_\alpha(\vec{\xi}) A_\alpha(x)$.

Il s'agit ici de montrer que la convergence de $< \xi \frac{\partial \psi_{N_k}}{dx} , \phi_\beta(x, \vec{\xi}) >_{V^*}$ quand N_k tend vers l'infini , pour les éléments $\phi_\beta(x, \vec{\xi}) = \xi \psi_\beta(\vec{\xi}) \Theta(x)$ implique la convergence de $< \xi \frac{\partial \psi_{N_k}}{dx} , \phi >_{V^*}$, pour ϕ quelconque dans V

Rappelons que , pour tout élément ϕ de V :

$$< \xi \frac{\partial \psi_N}{\partial x} , \phi >_{V^*} = - ((\psi_N , \xi \frac{\partial \phi}{\partial x}))$$

$$= - ((\sum_\alpha a_{\alpha N} \psi_\alpha , \xi \frac{\partial \phi}{\partial x}))$$

$$= - \sum_\alpha (a_{\alpha_N}(x) , (\xi \psi_\alpha(\vec{\xi}) \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, \vec{\xi}))_H)_{L^2(R)}$$

Afin de pouvoir appliquer les résultats de la proposition I.6.3. , montrons que , pour ϕ élément de V^* ,

$$(\xi \psi_\alpha(\vec{\xi}) , \frac{\partial \phi(x, \vec{\xi})}{\partial x})_H = \frac{d}{dx} (\psi_\alpha(\vec{\xi}) , \xi \phi(x, \vec{\xi}))_H \ ;$$

Approchons en effet $\phi(x, \vec{\xi})$ dans V^* par une suite d'éléments $\phi_n(x, \vec{\xi})$ de Δ , la régularité en x justifie :

$$(\psi_\alpha(\vec{\xi}) \ , \ \xi \frac{\partial \phi_n}{\partial x})_H = \frac{d}{dx} \ (\psi_\alpha(\vec{\xi}), \xi\phi_n)_H \ .$$

Puisque ϕ_n converge vers ϕ dans V^*, $(\psi_\alpha, \xi\phi_n)_H$ converge vers $(\psi_\alpha , \xi \phi)_H$ dans $L^2(R,H)$, et $(\psi_\alpha \ \xi \frac{\partial \phi_n}{\partial x})_H$ converge vers $(\psi_\alpha, \xi \frac{\partial \phi}{\partial x})_H$ dans $L^2(R,H)$.

L'élément $(\psi_\alpha ,\xi\phi)_H$ est donc dans $\mathcal{H}^1(R)$, et vérifie la relation indiquée , de telle sorte que :

$$< \xi \frac{\partial \psi_N}{\partial x} , \phi >_{V^*} = - \ (\sum_\alpha a_{\alpha_N} , \frac{d}{dx} (\xi \psi_\alpha, \phi)_H)_{L^2(R)}$$

$$= \sum_\alpha < \frac{da_{\alpha_N}}{dx} , (\xi \psi_\alpha, \phi)_H >_{\mathcal{H}^1(R)} .$$

Pour la sous suite N_k , on en déduit que :

$< \xi \frac{\partial \psi_{N_k}}{dx} , \phi >_{V^*}$ converge vers $< \sum_\alpha A_\alpha , (\xi\psi_\alpha \ \phi)_H >_{\mathcal{H}^1(R)}$,

pour tout ϕ de V^* , quand N_k tend vers l'infini .

Il est aisé de vérifier que $A_\alpha \ \xi\psi_\alpha(\vec{\xi})$ définit une forme linéaire continue sur V^*, par :

$$\phi \rightarrow < \sum_\alpha A_\alpha, (\xi \psi_\alpha, \phi)_H >_{\mathcal{H}^1(R)} \quad , \text{ en effet :}$$

$$< A_\alpha, (\xi \psi_\alpha, \phi)_H >_{\mathcal{H}^1(R)} \leq |A_\alpha|_{\mathcal{H}^{-1}(R)} \ |(\xi \psi_\alpha \ \phi)_H|_{\mathcal{H}^1(R)}$$

$$| \xi \psi_\alpha, \phi)_H|_{\mathcal{H}^1(R)} = ||(\xi \psi_\alpha, \phi)_H||_{L^2(R)} + || \frac{d}{dx} (\xi\psi_\alpha \ \phi)_H||_{L^2(R)}$$

et nous venons d'établir que pour tout ϕ de V^* :

$$\frac{d}{dx} (\xi \psi_\alpha, \phi)_H = (\xi \psi_\alpha, \frac{\partial \phi}{\partial x})_H = (\psi_\alpha, \ \xi \frac{\partial \phi}{\partial x})_H$$

d'où $| \xi \psi_\alpha, \phi)_H| \leq ||\xi \psi_\alpha||_H \ ||\phi||_H$

$$\left| \frac{d}{dx} \left(\xi \psi_\alpha, \phi\right)_H \right| \leq \|\psi_\alpha\| \quad \left\|\xi \frac{\partial \phi}{\partial}\right\|_H ,$$

soit

$$\left|(\xi \psi_\alpha, \phi)_H\right|_{\mathcal{D}'(R)} \leq \|\xi\psi_\alpha\|_H \quad |||\phi||| + \|\psi_\alpha\|_H \quad |||\xi \frac{\partial \phi}{\partial x}||| ,$$

c'est à dire

$$< A_\alpha, (\xi \psi_\alpha, \phi)_H >_{\mathcal{D}'(R)} \leq |A_\alpha|_{\mathcal{D}^{-1}(R)} \quad (\|\psi_\alpha\|_H + \|\xi \psi_\alpha\|_H) C. |\phi|_V .$$

Nous noterons la limite dans $V^{*\prime}$ de $\xi \frac{\partial \psi_{N_k}}{\partial x}$

$$\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_\alpha A_\alpha(x) \, \xi \psi_\alpha(\vec{\xi})$$

Proposition I.6.5.

Les éléments $\nu(\vec{\xi})\chi$ et $\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \chi}{\partial x}$ de $V^{*\prime}$ appartiennent à l'espace $L^2(R,H)$

Nous allons tenir compte du dernier résultat concernant $\xi \frac{\partial}{\partial x}$ d'une part , et d'autre part des propriétés de U .

Les éléments χ, g, et $\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$ vérifient dans $V^{*\prime}$ la relation $\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta\chi - A\chi = g$

Appliquons l'opérateur U aux deux membres . D'après le lemme I.1.6. et la proposition I.1.2. , nous obtenons dans $L^2(R,H)$:

$$U(\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}) + \chi - UA\chi = Ug , \text{ soit}$$

$$\chi = U\,(A\chi + g) - U(\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}) .$$

$A\chi$ et g étant dans $L^2(R,H)$, il en résulte que $\nu(|\vec{\xi}|)\, U(A\chi + g)$ est aussi élément de $L^2(R,H)$.

Il suffit donc , pour prouver que $\nu(|\vec{\xi}|)\,\chi$ est dans $L^2(R,H)$, de montrer qu'il en est ainsi de $\nu(\vec{\xi})\, U\, \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Comme $U\, \nu(\vec{\xi}) = \nu(\vec{\xi})U$, il suffit de vérifier que

$\nu(|\vec{\xi}|)\, \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$ est un élément de $V^{*\prime}$;

Cette dernière vérification se fait aisément , en reprenant la démonstration du fait que $A_\alpha\ \xi\psi_\alpha(\vec{\xi})$ est élément de $V^{*\prime}$.

En effet , $\nu(|\vec{\xi}|)\ \xi\ \psi_\alpha(\vec{\xi})$ et $\nu(\vec{\xi})\ \psi_\alpha(\vec{\xi})$ sont dans H , ceci grâce au comportement de $\psi_\alpha(\vec{\xi})$ pour $|\vec{\xi}|$ infini .

Nous pouvons alors reprendre les majorations en remplaçant $\psi_\alpha(\vec{\xi})$ par $\nu(\vec{\xi})\ \psi_\alpha(\vec{\xi})$:

$$< \frac{\partial\psi}{\partial x}\ \nu(\vec{\xi})\ ,\ \phi >_{V^*} = \sum_\alpha < A_\alpha, (\xi\ \psi_\alpha\ \nu(\vec{\xi})\ ,\phi)_H >_{\mathcal{D}'(R)}$$

$$< A_\alpha,\ (\xi\ \psi_\alpha, \nu\phi)_H >_{\mathcal{D}^1(R)} \leq |A_\alpha|_{\mathcal{D}^{-1}(R)} (||\nu(|\vec{\xi}|)\psi_\alpha||_H + ||\xi\nu(\vec{\xi})\psi_\alpha||_H) C. |\phi|_{V^*}$$

U applique $V^{*\prime}$ dans $L^2(R,H)$, et $U\ \nu(|\vec{\xi}|)\ \frac{\partial\psi}{\partial x}$ est donc élément de $L^2(R,H)$.

Reprenons l'équation

$$\xi\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + \xi\ \frac{\partial\chi}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|)\ \chi - A\chi = g\ ,$$

il est alors immédiat que $\xi\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + \xi\ \frac{\partial\chi}{\partial x}$ est dans $L^2(R,H)$.

Nous avons donc établi l'existence :

- d'un élément $\chi(x, \vec{\xi})$ de $L^2(R,H)$, tel que $\nu(\vec{\xi})\chi$ soit aussi dans $L^2(R,H)$,
- d'un élément de $V^{*\prime}$ noté $\xi\ \frac{\partial\psi}{\partial x}$, de la forme

$\xi\ \frac{\partial\psi}{x} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=4} A_\alpha(x)\ \xi\ \psi_\alpha(\vec{\xi})$, où $A_\alpha(x)$ appartient à $\mathcal{D}^{-1}(R)$,

tels que $\xi\ \frac{\partial\chi}{\partial x} + \xi\ \frac{\partial\psi}{x}$ soit dans $L^2(R,H)$, et que la relation suivante soit satisfaite dans $L^2(R,H)$:

$$(\xi\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + \xi\ \frac{\partial\chi}{\partial x}) + \nu(|\vec{\xi}|)\ \chi - A\chi = g$$

Nous pouvons encore préciser la nature du terme $\xi\ \frac{\partial\psi}{\partial x}$, en utilisant à nouveau le fait que g est élément de $\mathcal{Q}L^2(R,H)$, et le fait qu'il possède une symétrie de révolution en $\vec{\xi}$ d'axe ξ .

La première propriété a pour conséquence :

$$(((\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \chi}{\partial x}) + \nu(|\vec{\xi}|)\chi - A\chi \, , \, b_\alpha(x) \, \psi_\alpha(\vec{\xi}))) = o \, ,$$

Pour tout $b_\alpha(x)$ de $L^2(R)$, α variant de o à 4 .

$I\chi$ étant élément de $L^2(R,H)$, on a

$((L\chi, b_\alpha(x) \, \psi^\alpha(\vec{\xi}))) = o$, soit :

$((\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \chi}{\partial x} \, , \, b_\alpha(x) \, \psi_\alpha(\vec{\xi}))) = o$, ou encore :

$$((\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \chi}{\partial x} \, , \, \psi_\alpha(\vec{\xi}))_H \, , \, b_\alpha(x))_{L^2(R)} = o \, .$$

Utilisons la propriété des éléments de $\mathcal{H}^{-1}(R)$ rappelée au lemme I.6.1: les distributions de $\mathcal{H}^{-1}(R)$ sont les sommes finies de dérivées d'ordre ≤ 1 de fonctions de $L^2(R)$. Cette propriété se traduit pour $A_\alpha(x)$ par l'existence de $B_\alpha(x)$ et $C_\alpha(x)$ éléments de $L^2(R)$ tels que :

$$A_\alpha(x) = B_\alpha(x) + \frac{d \, C_\alpha(x)}{dx} \quad , \text{ et } \xi \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ peut se mettre sous la forme}$$

$$\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_\beta (B_\beta(x) + \frac{d \, C_\beta(x)}{dx}) \, \xi \, \psi_\beta(\vec{\xi}) .$$

L'expression précédente devient alors :

$$o = \sum_\beta \xi \, \psi_\beta(\vec{\xi}), \, \psi_\alpha(\vec{\xi}))_H \, (B_\beta(x), \, b_\alpha(x))_{L^2(R)} + (\sum_\beta \xi \, \psi_\beta(\vec{\xi}) \frac{dC_\beta}{dx} + \xi \frac{\partial \chi}{\partial x}, \psi_\alpha(\vec{\xi}))_H, b_\alpha(x))_{L^2(R)}$$

Afin de pouvoir transformer le dernier terme , et en particulier de pouvoir séparer pour les calculs effectifs les termes $\xi \frac{\partial \chi}{\partial x}$ et $\xi \, \psi_\alpha(\vec{\xi}) \frac{dC_\beta}{dx}$, il est utile de montrer que dans $\mathcal{H}^{-1}(R)$, on a

$$(\xi \frac{\partial \chi}{\partial x} \, , \, \psi_\alpha)_H = \frac{d}{dx} \, (\xi\chi \, , \, \psi_\alpha)_H \, .$$

Employons le procédé habituel , et approchons χ dans $L^2(R,H)$ par une suite d'éléments χ_n réguliers en x .

$\xi\ \psi_\alpha(\vec{\xi})$ étant élément de H ,

$(\xi\ \chi\ ,\ \psi_\alpha(\vec{\xi}))_H = (\chi\ ,\ \xi\ \psi_\alpha(\vec{\xi}))_H$,

et est limite de $(\chi_n\ ,\ \xi\ \psi_\alpha(\vec{\xi}))_H$ dans $L^2(R)$.

$\frac{d}{dx}(\chi_n\ ,\ \xi\ \psi_\alpha)_H$ converge donc dans $\mathcal{D}'^{-1}(R)$ vers $\frac{d}{dx}(\chi\ ,\ \xi\ \psi_\alpha)_H$.

La régulatiré en x de χ_n montre de plus que

$\frac{d}{dx}(\xi\ \chi_n\ ,\ \psi_\alpha)_H = (\xi\ \frac{\partial}{\partial x}\chi_n\ ,\ \psi_\alpha)_H$, d'où le résultat .

Nous pouvons alors écrire :

$$\sum_\beta (\xi\psi_\alpha,\psi_\beta)_H\ (B_\beta,\ b_\alpha)_{L^2(R)} - \left\langle \sum_\beta (\xi\psi_\alpha,\psi_\beta)_H\ C_\beta + (\xi\chi,\psi_\alpha)_H\ ,\ \frac{db_\alpha}{dx} \right\rangle_{\mathcal{D}'^{-1}(R)} = o$$

Il reste à donner à α les valeurs successives de 0 à 4 :

La valeur $\alpha = o$ élimine χ et donne

$$B_1 + \frac{dc_1}{dx} = o \quad \text{dans } L^2(R) ,$$

relation qui est équivalente à :

$(\xi\ \frac{\partial\psi}{\partial x}\ ,\ \psi_1)_H = o$ dans $L^2(R)$, soit encore :

$(\xi\ \psi,\psi_1)_H$ est constant dans $L^2(R)$, la constante étant indéterminée ; prenons la nulle , de telle sorte que

$(\xi\ \psi,\psi_1)_H$ appartienne à $L^2(R)$.

Les valeurs $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$ conduisent à

$$\frac{d}{dx}(\xi\ \psi,\psi_\alpha)_H = o \quad \text{dans } L^2(R) .$$

En effet , la symétrie cylindrique de $g(x, \vec{\xi})$ impose à $\chi(x, \vec{\xi})$ d'avoir cette même symétrie .

Les valeurs $\alpha = 1$ et $\alpha = 4$ donnent des résultats immédiats : posons $\Delta_{\alpha\beta} = (\xi\psi_\alpha\ \psi_\beta)_H$

$$\Delta_{1o}\ B_o + \Delta_{14}\ B_4 = -\Delta_{1o}\ \frac{dc_o}{dx} - \Delta_{14}\ \frac{dc_4}{dx} - \frac{d}{dx}\ (\xi\chi\ ,\ \psi_1)_H \quad , \text{ et}$$

$$\Delta_{14} B_4 = -\Delta_{14}\ \frac{dc_4}{dx} - \frac{d}{dx}\ (\xi\chi,\ \psi_4)_H \quad .$$

On en déduit que d'une part

$\Delta_{1o}\ B_o + \Delta_{14}\ B_4$ est dérivée d'une fonction de $L^2(R)$, et que : $\Delta_{14}\ B_4$ est aussi dérivée d'une fonction de $L^2(R)$, d'où les conclusions :

$A_o(x)$ et $A_4(x)$ s'écrivent $\frac{da_o}{dx}$ et $\frac{da_4}{dx}$, a_o et a_4 étant des éléments de $L^2(R)$,

$A_1(x)$ est nul .

$\xi \frac{\partial\psi}{\partial x}$ se trouve alors précisé :

$$\xi \frac{\partial\psi}{\partial x} = \xi\psi_o(\vec{\xi})\ \frac{da_o}{dx} + \xi\ \psi_4\ (\vec{\xi})\ \frac{da_4}{dx} \quad ,$$

notons $f(x, \vec{\xi})$ l'élément de $L^2(R,H)$ défini par

$$f = a_o(x)\ \psi_o(\vec{\xi}) + a_4(x)\ \psi_4(\vec{\xi}) + \chi(x, \vec{\xi}) \ .$$

Cet élément vérifie dans $V^{*\prime}$: $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|)f - A\ f = g$.

Montrons alors que f est solution forte du problème dans $L^2(R,H)$: appliquons l'opérateur U à cette équation dans $V^{*\prime}$; on obtient dans $L^2(R,H)$:

$f = UAf + Ug$, et f est donc dans $L^2(R,H)$.

La propriété $\mathfrak{M}\ U = I$ dans $L^2(R,H)$ montre que

$\mathfrak{M} f - Af = g$ dans $L^2(R,H)$.

Il reste à démontrer l'unicité de la solution de $\mathfrak{M} f - Af = g$ dans $L^2(R,H)$. Reportons nous à la démonstration de la proposition I.4.1 , qui se transpose immédiatement de L_N à L :

toute solution de $f - UAf = o$, où f est élément de $L^2(R,H)$, est dans V , et vérifie :

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + Lf = o \quad , \quad \text{et}$$

$$((\xi \frac{\partial f}{\partial x} , f)) + ((Lf,f)) = o \ .$$

Définissons $\phi(x, \vec{\xi})$ par $\phi(x, \vec{\xi}) = Af$, et cherchons à quelles conditions $f = U^{\prime}$. La démonstration permettant de conclure de $((\xi \frac{\partial f}{\partial x} , f)) = o$ reste entièrement valable , et nous ne la reproduirons pas .

On en déduit $((Lf,f)) = o$, qu'il est alors plus simple de traiter ici : $Qf = o$ dans $L^2(R,H)$, et de ce fait $Lf = o$, et f vérifie $\xi \frac{\partial f}{\partial x} = o$ dans $L^2(R,H)$, la conclusion est que f est constante à une fonction nulle de $L^2(R,H)$ près . f vérifiant : $f = UAf$ est nulle à l'infini , donc nulle dans $L^2(R,H)$, ce qui achève la démonstration du théorème annoncé à la fin du paragraphe 3 .

Equation linéaire, stationnaire sur la demi droite, avec condition de réflexion linéaire à la paroi .

Il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} \xi \dfrac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|)\, f - A f = \phi & x > o \ , \\ J^{+} Bf = \mathcal{G}\, J^{-} Bf + \Phi^{+} & x = o \ , \end{cases}$$

où $\mathcal{G}$ est l'opérateur de réflexion qui à la fonction de distribution des molécules incidentes sur la paroi $x = o$, fait correspondre la fonction de distribution des molécules réémises par cette paroi . Nous donnerons les propriétés classiques prises pour hypothèses . Le terme Φ^{+} est un terme de source .

B est l'opérateur de trace à $x = o$, c'est-à-dire : Bf est la valeur de la fonction $f(x, \vec{\xi})$ à la frontière $x = o$.

J^{+} et J^{-} sont les projections sur les demi-espaces $\xi > o$, et $\xi < o$, soit : $J^{\pm} f = f$ si $\xi \gtrless o$, et $J^{\pm} f = o$ si $\xi \lesseqgtr 0$.

Nous nous ramènerons à des conditions à la paroi de type réflexion homogène : $J^{+}Bf = \mathcal{G}\, J^{-}Bf$; il suffira de tenir compte du terme non homogène Φ^{+} dans le second membre de l'équation , c'est-à-dire de le modifier en conséquence .

Nous supposerons que le second membre ainsi obtenu possède une symétrie cylindrique en $\vec{\xi}$ d'axe ξ , et qu'il est orthogonal aux invariants des rencontres dans l'espace H ; nous utiliserons cette hypothèse dans les majorations à priori permettant de conclure à une convergence faible .

L'espace H est l'espace habituel déjà utilisé , et $J^{\pm} H$ sont définis par :

$$(f,g)_{J^{\pm}H} = (J^{\pm} f,\ J^{\pm} g)_{H} \ , \qquad ||f||_{J^{\pm}H} = ||J^{\pm} f||_{H} \ .$$

Nous considérons de même $((f,g))^{\pm}_{\mp}$, et $|||f|||^{\pm}_{\mp}$:

$$((f,g))^{\pm}_{\mp} = ((J^{\pm}_{\mp}f,\ J^{\pm}_{\mp}g)) \quad , \quad |||f|||^{\pm}_{\mp} = |||J^{\pm}_{\mp}f|||.$$

Les phénomènes à la paroi nous obligent à introduire de nouveaux espaces fonctionnels , notés $\widetilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$, définis par le produit scalaire suivant , $\rho(\vec{\xi})$ étant une fonction numérique de $\vec{\xi}$, qui reste positive :

$$(f,g)_{\widetilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}} = \int_{\vec{\xi}\in\mathbb{R}^3} |\xi|\ \rho(\vec{\xi})\ Bf(x,\vec{\xi})\ Bg(x,\vec{\xi})\ d\vec{\xi} \ .$$

La fonction $\rho(\vec{\xi})$ sera précisée .

Comme au chapitre I , le problème posé sera ramené à la résolution d'une équation intégrale . Il convient d'abord d'étudier le problème intermédiaire associé .

1. Résolution du problème intermédiaire

Le problème intermédiaire consiste à résoudre :

$$\begin{cases} \mathcal{M} f = \phi \quad , \ x > o \qquad \mathcal{M} = \xi \dfrac{\partial}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|) \\ \\ J^{+}Bf = \mathcal{J} J^{-}Bf \ , \ x = o \end{cases}$$

Pour une fonction $g(x,\vec{\xi})$, introduisons :

$$\bar{g}(x,\vec{\xi}) = g(x,\vec{\xi}) \quad \text{pour} \quad x \geq o$$
$$= \quad 0 \qquad \text{pour} \quad x < o \ ,$$

et notons $\bar{U}$ l'opérateur défini par :

$$\bar{U}\ g = \overline{Ug}$$
$$= \overline{\mathcal{E}}(\vec{\xi},\ .) \ast \bar{g}(\vec{\xi},\ .) \ ;$$

de manière analogue au chapitre I, nous pouvons énoncer :

Lemme II.1.1

Les opérateurs $\bar{U}$, $\nu(|\vec{\xi}|)\,\bar{U}$, $\xi \frac{\partial}{\partial x}\bar{U}$ sont des éléments de $\mathcal{L}(L^2(R^+,H)\ ,\ L^2(R^+,H)$, et l'opérateur $\bar{U}$ vérifie dans $L^2(R^+,H)$ la relation $\mathcal{M}\bar{U} = I$.

La démonstration repose sur les mêmes majorations du produit de convolution qu'au chapitre I, et sur les mêmes propriétés de dérivabilité .

Afin d'étudier $\bar{U}\phi$ pour la valeur $x = o$, remarquons que $B\bar{U}\phi$ a un sens : il est en effet nul par construction pour les valeurs positives de ξ , soit :

$$J^+ B \bar{U} \phi = o \ ,$$

tandis que pour les valeurs négatives de ξ , l'expression indiquée donne :

$$J^- B \bar{U} \phi = J^- \int_o^\infty \frac{-1}{\xi} \exp \frac{\nu(|\vec{\xi}|)}{\xi}\, y \quad \phi(y, \vec{\xi}) \quad dy \ ,$$

et la majoration suivante est alors immédiate :

$$(1) \qquad |J^- B U \phi| \leq J^- \{|\xi|\ \nu(|\vec{\xi}|)\}^{-1/2} \|\phi\|_{L^2(R^+)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

L'introduction de l'espace $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$ est ici naturelle , et nous énoncerons :

Lemme II.1.2.

L'opérateur $B\bar{U}$ est un élément de $\mathcal{L}(L^2(R^+,H), \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)})$ dont la norme est bornée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
De plus , $J^+ B \bar{U} = o$

Etudions maintenant la résolution du problème avec la condition à la limite suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{M} f = \phi & x > o \ , \\ J^+ B f = f^+ & x = o \ , \end{cases}$$

où f^+ est une fonction donnée de $\vec{\xi}$, pour $\xi > o$.

La solution , pourvu qu'elle ait un sens , s'écrit :

$$f = \bar{U}\,\phi + E\,f^+ \quad ,$$

$$E\,f^+ = \exp\left(-\frac{\nu(|\vec{\xi}|)}{\xi}\,x\right).\gamma(x)\ .\ f^+(\vec{\xi}) \quad .$$

Il y a alors lieu d'introduire l'espace $\hat{H} = \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)^{-1}}$, où l'opérateur E possède la propriété suivante :

Lemme II.1.3.

L'opérateur E est un élément de $\mathcal{L}(\hat{H},\ L^2(R^+,H)$, de norme bornée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le problème adjoint consiste d'abord à résoudre

$$\mathcal{M}^* f = \phi \quad , \quad x \geqslant o \ , \quad \text{où } \mathcal{M}^* = -\xi\frac{\partial}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|) \ .$$

L'opérateur $\bar{U}^*$ s'obtient à partir de l'opérateur U^* défini au chapitre I par la méthode donnant $\bar{U}$ à partir de U .

$B\,\bar{U}^*$ vérifie la majoration indiquée pour $B\,\bar{U}$, mais c'est $J^-\,B\,\bar{U}^*$ qui est nul par construction , et la majoration établie pour $J^-\,B\,\bar{U}\phi$ est maintenant valable pour $J^+\,B\,\bar{U}^*\phi$.

Les lemmes II.1.1, et II.1.2. sont vérifiés par $\mathcal{M}^*$ et $\bar{U}^*$.

Le problème adjoint avec condition à la limite a la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{M}^* f = \phi & x > o \ , \\ J^- B f = f^- & x = o \ , \end{cases}$$

où f^- est une fonction donnée de $\vec{\xi}$, pour $\xi < o$, et l'opérateur E^* obtenu en remplaçant ξ par $-\xi$ dans E conduit à la résolution de ce problème :

$$f = \bar{U}^*\,\phi + E^*\,f^- \ .$$

E^* possède la propriété énoncée pour E au lemme II.1.3.

Résolvons maintenant le problème intermédiaire (nous définirons ensuite le problème intermédiaire adjoint) .

Nous supposerons que $\mathcal{G}$ est borné dans $\hat{H}$ par une constante γ. Exploitons ce qui précède , et exprimons la solution du problème intermédiaire sous la forme :

$$f = \bar{U}\phi + Ef^+ \quad , \qquad \text{où} \quad f^+ = J^+Bf \ , \quad \text{soit}$$

$$f^+ = \mathcal{G}J^-Bf \ ,$$

c'est-à-dire :

$$f^+ = \mathcal{G}J^-B \ (\bar{U}\phi + E f^+) \ .$$

Remarquons que $J^-B\,E\,f^+$ est nul , et nous obtenons l'expression formelle de la solution du problème intermédiaire :

$$f = \bar{U}\phi + E\mathcal{G}J^-B\bar{U}\phi$$

Posons : $W = \bar{U} + E\mathcal{G}J^-B\bar{U}$,

et supposons que $\mathcal{G}$ est borné dans $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$, par γ.

Proposition II.1.1.

L'opérateur W défini par $W = \bar{U} + E\mathcal{G}J^-B\bar{U}$ est

tel que $\begin{cases} \mathcal{M}W\phi = \phi & \text{dans } L^2(R^+,H) \\ J^+BW\phi = \mathcal{G}J^-BW\phi & \text{dans } \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}, \end{cases}$

en autre , W est un élément de $\mathcal{L}(L^2(R^+,H) \ , L^2(R^+,H)$,

et BW est un élément de $\mathcal{L}(L^2(R^+,H) \ , \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)})$.

Le problème adjoint fait intervenir l'opérateur $\mathcal{G}^*$ adjoint de $\mathcal{G}$ au sens exposé dans [24] , comme il est d'ailleurs rappelé dans les généralités ; Il est aussi borné par γ dans $\hat{H}$ et $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$. Le problème intermédiaire adjoint s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathcal{M}^*f = \phi & x > o \ , \\ J^-Bf = \mathcal{G}^*J^+Bf & x = o \ ; \end{cases}$$

il se résoud à l'aide des adjoints définis plus haut :

$$f = \bar{U}^* \phi + E^* \mathcal{J}^* J^+ B \bar{U}^* \phi ,$$

et nous poserons :

$$W^* = \bar{U}^* + E^* \mathcal{J}^* J^+ B \bar{U}^* .$$

La proposition II.1.1. se transpose immédiatement à $W^*, \mathcal{M}^*$, en remplaçant J^+ par J^- , $\mathcal{J}$ par $\mathcal{J}^*$.

Nous allons préciser les différents domaines des opérateurs introduits, dans $L^2(R^+,H)$. Dans ce but, définissons tout d'abord l'espace F , muni de la norme $|f|_F$

Définition de l'espace F .

$$F = \{ f, \exists \phi \in L^2(R^+,H) , \exists f^+ \in \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)} , f = \bar{U} \phi + E f^+ \}$$

$$|f|_F^2 = |||\xi \frac{\partial f}{\partial x}|||^2 + |||\nu(|\vec{\xi}|) f|||^2 + ||Bf||^2_{\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}}$$

Il est en effet possible de prendre cette expression pour norme dans F :

d'après le lemme II.1.1. , un élément de F de la forme $f = \bar{U} \phi + E f^+$, est bien tel que $\phi = \mathcal{M} f$, et tel que les deux expressions $\xi \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\nu(|\vec{\xi}|) f$ sont chacune dans l'espace $L^2(R^+,H)$;

le lemme II.1.2. montre qu'il suffit d'établir que $\nu(|\vec{\xi}|) E f^+$ est dans l'espace $L^2(R^+,H)$, ce qui est immédiat , pour f^+ appartenant à l'espace $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$

L'espace défini à l'aide des opérateurs $\bar{U}^*$ et E^* , que l'on peut noter F^*, est muni de la même norme que F , et il y a identité entre F et F^*, cette identité est algébrique et topologique .

Proposition II.1.2.

Si f et g sont deux éléments de F , on a

$$((\mathcal{M} f, g)) + (\xi B f, Bg)_H = ((f, \mathcal{M}^* g))$$

Tout d'abord , les quanités écrites ont un sens , f,g, $\mathcal{M} f, \mathcal{M}^* g$ étant dans $L^2(R^+,H)$, et f et g dans $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$.

La relation écrite est alors immédiate .

Définissons deux sous-espaces $\bar{V}$ et $\bar{V}^*$ de F , où la norme est la norme induite par F :

Définition de $\bar{V}$ et $\bar{V}^*$:

$$\bar{V} = \{f \mid \exists\, \phi \in L^2(R^+,H) \ , \quad f = W\phi \ \}$$

$$V^* = \{f \mid \exists\, \phi \in L^2(R^+,H) \ , \ f = W^*\phi \ \} \ .$$

Proposition II.1.3.

Si f est un élément de $\bar{V}$, et g un élément de $\bar{V}^*$

$((\mathcal{M}f,g)) = ((f,\mathcal{M}^*g))$

Il suffit de remarquer qu'on peut aussi définir $\bar{V}$ et $\bar{V}^*$ par :

$$\bar{V} = \{f \mid \quad f \in F \ , \quad J^+ Bf = \mathcal{G} J^- Bf\}$$

$$\bar{V}^* = \{f \mid \quad f \in F \ , \quad J^- Bf = \mathcal{G}^* J^+ Bf\} \ .$$

Les propriétés de $\mathcal{G}^*$ et $\mathcal{G}^*$ reportées dans la relation de la proposition II.1.2. permettent alors de conclure .

Lemme II.1.4.

Les opérateurs W et W^* sont bornés dans $L^2(R^+,H)$

$$|||W\phi||| \leq |||\bar{U}\phi||| + |||E\mathcal{G}J^- B\bar{U}\phi|||$$

$$\leq |||\bar{U}\phi||| + |\mathcal{G}J^- B\bar{U}\ \phi|_{\hat{H}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Au lemme II.1.2. nous avons vu que $\bar{U}$ était borné de $L^2(R^+,H)$ dans $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$ par $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathcal{G}\cdot$, borné dans $\hat{H}$ par γ , est à fortiori borné de $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$ dans $\hat{H}$ par γ , d'où :

$$|||W||| \leq \frac{1}{\nu(o)} + \frac{\gamma}{2}$$

Proposition II.1.4.

L'opérateur W est borné de $L^2(R^+,H)$ dans F , pourvu que $\mathcal{G}$ soit borné dans $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$. Il en est de même de W^* et $\mathcal{G}^*$.

$$|W\phi|_F^2 = |||\xi \frac{\partial}{\partial x} W\phi|||^2 + |||\nu(|\vec{\xi}|)W\phi|||^2 + ||B\ W\phi||^2_{\widetilde{H\nu}}$$

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} W\phi = \phi - \nu(|\vec{\xi}|)W\phi$$

$$|||\xi \frac{\partial}{\partial x} W\phi|||^2 \leq |||\phi|||^2 + |||\nu(|\vec{\xi}|)W\phi\ |||^2$$

$$|||\nu(|\vec{\xi}|)W\phi|||^2 \leq |||\nu(|\vec{\xi}|)\bar{U}\phi|||^2 + |||\nu(|\vec{\xi}|)E\,\mathcal{G}J^-B\ \bar{U}\ \phi|||^2$$

$$\leq |||\phi|||^2 + \frac{1}{2}\,||\mathcal{G}\,J^-B\ \bar{U}\ \phi||^2_{\widetilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}}$$

$$\leq |||\phi|||^2 \{1 + \frac{1}{4}\,|\mathcal{G}|^2_{\mathcal{L}(\widetilde{H}_{\nu(\vec{\xi})},\ H_\nu)}\}$$

$$B\ W\ \phi = J^-\ B\ U\ \phi + \mathcal{G}J^-\ B\ U\ \phi$$

$$||B\ W\ \phi||_{\widetilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,|||\phi||| + |\mathcal{G}|_{\mathcal{L}(\widetilde{H}_{\nu(\vec{\xi})},\ \widetilde{H}_{\nu(\vec{\xi})})}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,|||\phi|||$$

et il en résulte que W est borné de $L^2(R^+,H)$ dans F .

Notons F_o et F_o^* les sous-espaces de F des fonctions nulles en zéro , et qui appartiennent à $\bar{V}$ et $\bar{V}^*$ respectivement .
Introduisons pour cela les sous-espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^*$ de $L^2(R^+,H)$:

$$\mathcal{X} = \{\ \phi|,\ \ \phi \in L^2(R^+,H)\ ,\ \ J^-B\ \bar{U}\ \phi = o\ \}$$
$$\mathcal{X}^* = \{\ \phi|\ \ \phi \in L^2(R^+,H)\ ,\ \ J^+\ B\ \bar{U}^*\phi = o\ \}\ ,$$

à partir desquels F_o et F_o^* sont définis :

$$F_o = \{f|\ \ \exists\ \phi \in \mathcal{X},\ \ \ f = \bar{U}\ \phi\ \}$$
$$F_o^* = \{f|\ \ \exists\ \phi \in \mathcal{X}^*,\ \ f = \bar{U}^*\ \phi\ \}\ .$$

Deux éléments f de F_o et g de F_o^* vérifient alors de manière évidente :

$$((\mathcal{M}f,g)) = ((f,\mathcal{M}^*g))\ ,\ \text{et de plus :}$$

Proposition II.1.5.

Si f est dans F et g dans F_o^* ,

$$((\mathcal{M}\,f,g)) = ((f,\mathcal{M}^*g))\ .$$

Si f est dans F et g dans F_o ,

$$((\mathcal{M} g,f)) = ((g,\mathcal{M}^* f))$$

Ceci résulte de l'identité entre F et F^*.

Etudions maintenant le dual de certains de ces espaces , ce qui permettra de savoir dans quelle mesure $\mathcal{M}$ et U sont iverses , et dans quelle mesure W résoud le problème intermédiaire . Les résultats seront aussi appliqués pour étudier des convergences qui permettront de passer du problème modifié au problème posé .

Pour mener à bien cette étude , nous allons considérer qu'un élément appartenant à un espace fonctionnel pour $x > o$, et à un autre espace pour $x = o$, est en fait élément d'un espace produit : L'espace F sera par exemple considéré comme espace produit .

Espace $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}$

Par définition , un élément ϕ de $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}$ est le couple $(\phi^+(x, \vec{\xi}) , B\,\phi(\vec{\xi}))$, où $\phi^+(x, \vec{\xi})$ est la restriction à R^+ d'un élément de $L^2(R,H)$. $B\,\phi$ est fonction de $\vec{\xi}$ seul , et appartient à $\hat{H}$.

Normons cet espace par la norme cartésienne :

$$[\![\phi]\!]^2_{L^2(R^+,H)\times\tilde{H}} = |||\phi^+|||^2_{L^2(R,H)} + ||B\,\phi||^2_{\tilde{H}}$$

$$= [\![\phi^+, B\phi]\!]^2_{L^2(R,H)\ H}$$

Le produit scalaire dans cet espace est alors :

$$[\phi,\psi] = [(\phi^+, B\phi) , (\psi^+, B\psi)]$$

$$= ((\phi^+,\psi^+))_{L^2(R,H)} + (B\phi, B\psi)_{\tilde{H}} .$$

Espace $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$ où $\rho(\vec{\xi}) \geq 1$

Un élément $\phi = (\phi^+, B\phi)$ appartient à l'espace $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$

1) si ϕ^+ est la restriction à R^+ d'un élément Φ de l'espace $V(R,H)$ que nous avons défini au chapitre I.

2) un tel élément a pour trace en $x = o$ l'élément note $B\phi$, et nous dirons que ϕ appartient à $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$ si de plus $B\phi$ est élément de $\tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$. La notation de cet espace sous forme d'espace produit est justifiée par analogie avec l'espace précédent, et la norme que nous allons définir :

$$|||\phi|||_{V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}} = |\phi^+|_{V(R^+,H)} + ||B\phi||_{\tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}} ,$$

où la norme de ϕ^+ est, d'après l'ouvrage de Lions et Magens [28], page 46, théorèmes 9.1 et 9.2, donnée par :

$$|\phi^+|_{V(R^+,H)} = \inf |\Phi|_{V(R,H)} , \quad \Phi \text{ étant tel que :}$$
$$\Phi = \phi^+ \text{ presque partout sur } R^+ .$$

Espace $V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})^{-1}}$

Un couple $(\psi^+, B\psi)$ est élément de $V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})^{-1}}$, si

B_ψ appartient à l'espace $\tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})^{-1}}$

ψ^+ est un élément de $V'(R^+,H)$ dual de $V(R^+,H)$.

Nous reportant à l'ouvrage précédent, p. 87. remarque 12.4, ψ^+ peut être identifié, à un isomorphisme près, à un élément de $V'(R,H)$, dual de $V(R,H)$, à support dans $x \geq o$. Nous n'utiliserons d'ailleurs pas la forme explicite des éléments de $V'(R^+,H)$.

Normons $V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})^{-1}}$ par :

$$|||\psi|||_{V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})^{-1}}} = |\psi^+|_{V'(R^+,H)} + ||B\psi||_{\tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})^{-1}}}$$

Notons $< , >_{V'(R^+,H)}$ la dualité entre deux éléments de $V(R^+,H)$ et de $V'(R^+,H)$

$$|\psi^+|_{V'(R^+,H)} = \sup_{|\phi^+|_{V(R^+,H)}=1} <\phi^+ , \psi^+>_{V(R^+,H)}$$

Montrons que l'espace vectoriel normé $V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\xi)-1}$ est l'espace dual de $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$:

L'inclusion $V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})-1} \subset (V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})})'$, est immédiate :

Pour tout élément $(\psi^+, B\psi)$ de $V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})-1}$, la forme linéaire définie sur $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$ par :

$\phi \longrightarrow < \psi^+, \phi^+>_{V(R^+,H)} + (B\psi , B\phi)_{\tilde{H}}$ est continue sur $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$, en effet :

$$<\phi^+,\psi^+>_{V(R^+,H)} + (B\psi, B\phi)_{\tilde{H}} \leq |\phi^+|_{V(R^+,H)}|\psi^+|_{V(R^+,H)} + ||B\psi||_{\tilde{H}_{\rho-1}}||B\phi||_{\tilde{H}_{\rho}}$$

$$\leq [\![\phi]\!]_{V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho}} \cdot [\![\psi]\!]_{V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho-1}}$$

Inversement, montrons qu'un élément ψ de $(V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho})'$ est de la forme $(\psi^+, B\psi)$, où ψ^+ est dans $V'(R^+,H)$ et $B\psi$ dans $\tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})-1}$:

L'élément ψ en partilucier détermine une forme linéaire continue pour les éléments ϕ de $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$, tels que $B\phi = o$ dans $\tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$: $\phi^+ \longrightarrow <\psi,\phi>_{V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}}$

ψ est donc une forme linéaire continue sur les éléments de $V(R^+,H)$, et est donc un élément de $V'(R^+,H)$, soit ψ^+ cet élément.

Prenons maintenant les éléments ϕ tels que $\phi^+ = o$ dans $V(R^+,H)$. ψ détermine alors la forme linéaire :

$$B\phi \longrightarrow < \psi, \phi >_{V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}} ,$$

c'est-à-dire une forme linéaire continue sur $\tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$ c'est donc un élément de $\tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})-1}$, soit $B\psi$ cet élément.

Tout élément de $(V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})})'$ appartient donc à $V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})-1}$.

Lemme II.1.5

Sur $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$, on peut définir les opérateurs linéaires $(\mathcal{M}, J^+)$ et $(\mathcal{M}^*, J^-)$:

$$(\mathcal{M}, J^+)\ (\phi^+, B\phi) = (\mathcal{M}\phi^+, J^+ B\phi) ,$$

$$(\mathcal{M}^*, J^-)\ (\phi^+, B\phi) = (\mathcal{M}^*\phi^+, J^- B\phi) ;$$

$(\mathcal{M}, J^+)$ et $(\mathcal{M}^*, J^-)$ sont des éléments respectivement de $\mathcal{L}(V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}, L^2(R^+, H) \times J^+ \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})})$ et $\mathcal{L}(V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}, L^2(R^+,H) \times J^- \tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})})$, et on a

$$\left[(\mathcal{M}, J^+)\ \phi,\psi\right]_{L^2(R^+,H)\times\tilde{H}} = \left[\phi, (\mathcal{M}^*, J^-)\ \psi\right]_{L^2(R^+,H)\times\tilde{H}} .$$

Dès que $B\phi$ est dans $\tilde{H}_\rho$, $J^+B\phi$ est élément de $J^+\tilde{H}_{\rho(\vec{\xi})}$, et , ϕ^+ étant dans $V(R^+,H)$, $\mathcal{M}\phi^+$ est élément de $L^2(R^+,H)$, d'après les propriétés de $\mathcal{M}$ dans $V(R,H)$ que l'on a vues au chapitre I , de même pour $(\mathcal{M}^*, J^-)$

Etudions maintenant l'expression :

$$\left[(\mathcal{M}, J^+)\ \phi,\psi\right] = ((\mathcal{M}\phi^+, \psi^+)) + (J^+B\phi, B\psi)_{\tilde{H}} ,$$

or : $\left[\phi, (\mathcal{M}^*, J^-)\psi\right] = ((\mathcal{M}^*\psi^+, \phi^+)) + (J^-B\psi, B\phi)_{\tilde{H}}$, où

$$(J^+B\phi, B\psi)_{\tilde{H}} = (|\xi|\ J^+B\phi, B\psi)_H = (B\phi, B\psi.\xi)_{J^+H} ,$$

$$(J^-B\psi, B\phi)_{\tilde{H}} = (|\xi|\ J^-B\psi, B\phi)_H = -(B\phi, B\psi.\xi)_{J^-H} ;$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition II.1.2 pour obtenir le résultat annoncé

Lemme II.1.6.

L'opérateur $(\mathcal{M}, J^+)$ peut être prolongé à l'espace $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}$; ce prolongement , encore noté $(\mathcal{M}, J^+)$ est un élément de $\mathcal{L}(L^2(R^+,H) \times \tilde{H}, V'(R^+,H) \times J^+\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)^{-1}})$.

Soit un élément h de $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}$

$h \longrightarrow \left[h, (\mathcal{M}^*, J^-)\ \psi\right]$ détermine une forme linéaire continue sur $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$. Il existe donc un élément du dual ,

$V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)^{-1}}$, que l'on notera $(\mathcal{M}, J^+)h$, tel que , pour tout ψ de $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$ on ait :

$$\left[h, \ (\mathcal{M}^*, J^-)\ \psi\right] = < (\mathcal{M}, J^+)\ h, \psi >_{V(R^+,H) \times \tilde{H}_\nu} ,$$

$< \ , \ >_{V(R^+,H) \times \tilde{H}_\nu}$ désignant la dualité entre les deux espaces $V(R^+,H) \times \tilde{H}_\nu$ et $V'(R^+,H) \times \tilde{H}_\nu{}^{-1}$.

On peut remarquer qu'il suffit de prolonger $\mathcal{M}$ à $L^2(R^+,H)$, et J^+ de $\tilde{H}_\nu$ à $\tilde{H}_{\nu-1}$. L'élément obtenu est bien alors , d'après le chapitre I , dans l'espace $V'(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu-1}$, et l'unicité montre que c'est bien l'élément prolongeant $(\mathcal{M}, J^+)$.

Le même raisonnement s'applique à $(\mathcal{M}^*, J^-)$:

$$< (\mathcal{M}^*, J^-)h, \psi >_{V(R^+,H) \times \tilde{H}_\nu} = \left[h, (\mathcal{M}, J^+)\ \psi\right]$$

Lemme II.1.7.

Sur $L^2(R^+,H) \times J^+ \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$ on peut définir un opérateur $(\bar{U},E)$ par :

$(\phi^+, B\phi) \longrightarrow (\bar{U}\ \phi^+ + E\ J^+\ B\phi,\ B\ \bar{U}\ \phi^+ + J^+\ B\phi)$

L'opérateur ainsi défini est un élément de

$\mathcal{L}\ (L^2(R^+,H) \times J^+ \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}\ ,\ V(R^+,H) \times \tilde{H}\ )$

On peut définir de manière analogue l'opérateur $(\bar{U}^*\ ,\ E^*)$, dans l'espace $L^2(R^+,H) \times J^- \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$.

On a vu en effet que :

$\bar{U}$ applique $L^2(R^+,H)$ dans $V(R^+,H)$ (et que

$B\ \bar{U}$ applique $L^2(R^+,H)$ dans $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$;

Par ailleurs , EJ^+ opère de $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$ dans $V(R^+,H)$.

Ces opérateurs étant bornés , $(\bar{U},E)$ est borné de $L^2(R^+,H) \times J^+ \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$ dans $V(R^+,H) \times \tilde{H}$.

Lemme II.1.8.

L'opérateur $(\bar{U},E)$ peut être étendu à $V'(R^+,H) \times J^+ \tilde{H}$, son extension, notée $(\bar{U},E)$ est un élément de

$$\mathcal{L}\ (V'(R^+,H) \times J^+ \tilde{H}\ ,\quad L^2(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu-1}\ )$$

Introduisons les opérateurs $J^{\pm}$ agissant de la manière suivante : $J^{\pm}\ (\phi^+,\ B\phi)$, et montrons que $(\bar{U},E)\ J^+$ peut être étendu de $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$ à $V'(R^+,H) \times \tilde{H}$.

Soit un élément $(\phi^+,\ B\phi)$ de $V'(R^+,H) \times \tilde{H}$. L'expression suivante est une forme linéaire continue sur $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$

$$<J^+(\phi^+,\ B\phi),\ (\bar{U}^*,\ E^*)\ J^-(g^+,\ Bg)>$$

$$\leq |J^+(\phi^+,\ B\phi)|_{V' \times \tilde{H}} \quad |(\bar{U}^*,\ E^*)\ J^-(g^+,\ Bg)|_{V \times \tilde{H}} \quad \text{où}$$

$$|(\bar{U}^*,\ E^*)J^-(g^+,\ Bg)|_{V \times \tilde{H}} < |\bar{U}^* g^+ + E^* J^- Bg|_V + |B\,\bar{U}^* g^+ + J^- Bg|_{\tilde{H}}$$

$$< C_1\ |||g||| \ + \ C_2\ ||g||_{\tilde{H}_\nu}$$

Il existe donc un élément de $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})-1}$, que l'on notera $\widetilde{(\bar{U},E)}J^+(\phi^+,\ B\phi)$ tel que pour tout élément $(g^+,\ Bg)$ de $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$, on ait :

$$|\widetilde{(\bar{U},E)}J^+(\phi^+,\ B\phi),\ J^-(g^+,\ Bg)| = <J^+(\phi^+,\ B\phi),(\bar{U}^*,E^*)J^-(g^+,\ Bg)>$$

Montrons que l'opérateur $\widetilde{(\bar{U},E)}J^+$ ainsi défini coïncide avec $(\bar{U},E)J^+$ sur $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(\xi)}$: prenons un élément $(\phi^+,\ B\phi)$ de cet espace, et montrons que, pour tout $(g^+,\ Bg)$ de $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}_\nu$, on a

$$<J^+(B\phi^+,\ B\phi),(\bar{U}^*,E^*)J^-(g^+,\ Bg)> = |(\bar{U},E)J^+(\phi^+,\ B\phi),\ J^-(g^+,\ Bg)|$$

La proposition II.1.6. a), dont la démonstration est indépendante du présent lemme, établit que, si $(\phi^+, B\phi)$ est un élément de $L^2(R^+,H) \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$:

$$(\mathcal{M}, J^+) \circ (\bar{U},E)\, J^+ (\phi^+, B\phi) = J^+(\phi^+, B\phi) ,$$

et si (g^+, Bg) est élément de $L^2(R^+,H)\times \tilde{H}$,

$$(\mathcal{M}^*, J^-) \circ (\bar{U}^*, E^*)\, J^- (g^+, Bg) = J^- (g^+, Bg).$$

Ceci conduit à :

$$\langle J^+(\phi^+, B\phi), (\bar{U}^*, E^*) J^-(g^+, Bg)\rangle = \langle (\mathcal{M},J^+)\circ(\bar{U},E)J^+(\phi^+,B\phi), (\bar{U}^*,E^*)J^-(g^+,Bg)$$

$$= \left[(\bar{U},E)\, J^+(\phi^+,B\phi),\ (\mathcal{M}^*,\bar{J} \circ (\bar{U}^*, E^*)\, J^-(g^+, Bg)\right]$$

$$= \left[(\bar{U},E)\, J^+(\phi^+,B\phi),\ J^-(g^+, Bg)\right]$$

Il reste maintenant à établir que $(\bar{U},E)J^+$ est borné de $V(R^+,H)\times J^+ \tilde{H}$ dans $L^2(R^+,H)\times \tilde{H}_{\nu-1}$

$$|(\bar{U},E)J^+(\phi^+,B\phi)| = \sup_{|g^+,Bg|_{L^2(R^+,H)\times \tilde{H}_\nu} = 1} \langle J^+(\phi^+,B\phi), (\bar{U}^*,E^*)J^-(g^+, Bg)\rangle$$

$$\leq \langle J^+(\phi^+,B\phi)\rangle_{V'\times \tilde{H}} \quad \langle (\bar{U}^*,E^*)\, J^-(g^+,Bg)\rangle_{V\times \tilde{H}}) \Big|_{|g^+,Bg|_{L^2\times \tilde{H}_\nu} = 1}$$

$$\leq C \{ |\phi^+|_{V'} + |B\phi|_{\tilde{H}} \}$$

Proposition II.1.6

Les opérateurs $(\mathcal{M}, J^+)$ et $(\bar{U},E)$ d'une part, et $(\mathcal{M}^*, J^-)$ et $(\bar{U}^*, E^*)$ d'autre part, possèdent les propriétées suivantes :

a)	Sur $L^2(R^+,H) \times J^+ \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$:	$(\mathcal{M}, J^+) \circ (\bar{U},E) = Id.$	
	Sur $L^2(R^+,H) \times J^- \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$	$(\mathcal{M}^*, J^-) \circ (\bar{U}^*, E^*) = Id.$	
b)	Sur $V(R^+, H) \times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$:	$(\bar{U}, E) \circ (\mathcal{M}, J^+) = Id.$	
		$(\bar{U}^*, E^*) \circ (\mathcal{M}^*, J^-) = Id.$	
c)	Sur $L^2(R^+, H)$ $\tilde{H}_{\nu(\lvert\vec{\xi}\rvert)}$:	$(\bar{U}, E) \circ (\mathcal{M}, J^+) = Id.$	
		$(\bar{U}^*, E^*) \circ (\mathcal{M}^*, J^-) = Id.$	

a) Soit $(\phi^+, B\phi)$ un élément de $L^2(R^+, H) \times \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$.

$$(\phi^+,B\phi) \xrightarrow{(\bar{U},E)} (\bar{U}\,\phi^+ + EJ^+ B\phi, B\bar{U}\phi + J^+B\phi) \xrightarrow{(\mathcal{M},J^+)} (\mathcal{M}(\bar{U}\phi^+ + EJ^+ B\phi), J^+B\bar{U}\phi + J^+B\,\phi)$$

$U\phi^+$ est un élément de $V(R^+, H)$, de ce fait, $\mathcal{M}\,\bar{U}\,\phi^+ = \phi^+$,

Comme le montre le calcul direct. Le raisonnement s'achève par :

$$\mathcal{M}\,E = 0$$

$$J^+ B\,\bar{U}\,\phi = 0$$

$J^+ B\,\phi = B\,\phi$, puisque $B\,\phi$ est élément de $J^+ \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$.

b) Soit $(\phi^+, B\phi)$ un élément de $V(R^+, H) \times \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$.

$$(\phi^+, B\phi) \xrightarrow{(\mathcal{M},J^+)} (\mathcal{M}\,\phi^+, J^+ B\phi) \xrightarrow{(\bar{U},E)} (\bar{U}\,\mathcal{M}\,\phi^+ + EJ^+B\phi, B\bar{U}\,\mathcal{M}\,\phi^+ + J^+B\phi)$$

Ici encore, ϕ^+ étant élément de $V(R^+,H)$, le calcul direct d'intégration par parties dans $\bar{U}\,\mathcal{M}$ montre que :

$\bar{U}\,\mathcal{M}\,\phi^+ + E\,J^+\,B\,\phi = \phi^+$, et d'autre part :

$J^-\,B\,\bar{U}\,\mathcal{M}\,\phi^+ = J^-\,B\,\phi$,

$J^-\,B\,\phi + J^+\,B\,\phi = B\,\phi$.

Les démonstrations de a) et b) relatives aux adjoints sont analogues.

c) La propriété se démontre facilement à l'aide de la relation indiquée en b), mais appliquée aux opérateurs adjoints :

$$\left[(\bar{U},E) \circ (\mathcal{M}, J^+)\, \phi\ ,\ \psi \right]_{L^2(R^+,H)\times \tilde{H}} = \langle (\mathcal{M},J^+)\phi,\ (\bar{U}^*,E^*)\psi \rangle_{V(R^+,H)\times \tilde{H}_\nu}$$

$$= \left[\phi, (\mathcal{M}^*,J^-) \circ (\bar{U}^*,\ E^*)\ \psi \right]_{L^2(R^+,H)\times \tilde{H}}$$

$$= \left[\phi\ ,\ \psi \right]_{L^2(R^+,H)\times \tilde{H}}$$

ceci pour tout élément ψ de $L^2(R^+,\ H)\times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier l'opérateur W.

Etude de l'opérateur W

A un élément ϕ^+ de $L^2(R^+,H)$ on peut associer l'élément de $L^2(R^+,H)\times \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$ défini par $(\phi^+,\ B\phi)$, où $B\phi$ est obtenu à partir de ϕ^+ de la manière suivante :

$$B\ \phi\ = B\ \bar{U}\ \phi^+ + \mathcal{J}^-\ B\ \bar{U}\ \phi^+\ .$$

On obtient ainsi un sous-espace de $L^2(R^+,H)\times \tilde{H}_\nu$, et l'opérateur $(\bar{U},E)$ appliqué à un des éléments de $L^2(R^+,H)\times \tilde{H}_\nu$ de cette forme donne un élément de $V(R^+,H)\times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$:

$$(\bar{U},E)\ (\phi^+,\ B\bar{U}\phi^+ + \mathcal{J}J^-\ B\bar{U}\phi^+) = (\bar{U}\phi^+ + E\mathcal{J}J^-\ B\bar{U}\phi^+, J^-B\bar{U}\phi^+ + \mathcal{J}J^-B\bar{U}\phi^+)\ ,$$

expression où l'on reconnait l'élément $W\ \phi^+$ de $V(R^+,H)\times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$, soit la nouvelle formulation :

$$W\ \phi^+ = (\bar{U},\ E)\ (\phi^+,\ B\bar{U}\phi^+ + \mathcal{J}J^-\ B\ \bar{U}\ \phi^+)$$

et W est un élement de $\mathcal{L}\ (L^2(R^+,H)\ ,\ V(R^+,H)\times \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$.

Lemme II.1.9

On peut étendre W à l'espace $V'(R^+,H)$, son extension est un élément de $\mathcal{L}\ (V'(R^+,H),\ L^2(R^+,H)\times \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)^{-1}})$.

$(\bar{U},E)$ peut en effet être étendu à $V'(R^+,H)\times \tilde{H}_{\nu(|\xi|)^{-1}}$,

et $J^- B \bar{U} \phi^+$ ainsi que $\mathcal{J}J^- B \bar{U} \phi^+$ sont alors éléments de $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)^{-1}}$.

Proposition II.1.7

Les opérateurs W et $\mathcal{M}$ satisfont les relations suivantes :

a) ϕ étant un élément $(\phi^+, B\phi)$ de $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$:

$$W \mathcal{M} \phi^+ = (\phi^+ - E J^+ B \phi + E \mathcal{J} J^- B \phi , J^- B \phi + \mathcal{J} J^- B \phi)$$

b) $(\phi^+, B \phi)$ étant un élément de $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}$

$$W \mathcal{M} \phi^+ = (\phi^+ - E J^+ B \phi + E \mathcal{J} J^- B \phi , J^- B \phi + \mathcal{J} J^- B \phi)$$

a) L'élément ϕ^+ étant dans $V(R^+,H)$, l'expression :

$(\mathcal{M} \phi^+, B \bar{U} \mathcal{M} \phi^+ + \mathcal{J} J^- B \bar{U} \mathcal{M} \phi^+)$ appartient à $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}$.

Appliquons lui l'opérateur $(\bar{U},E)$, pour obtenir $W \mathcal{M} \phi^+$:

$$W \mathcal{M} \phi^+ = (\bar{U} \mathcal{M} \phi^+ + EJ^+ B\bar{U} \mathcal{M} \phi^+ + E\mathcal{J} J^- B\bar{U} \mathcal{M} \phi^+, B\bar{U} \mathcal{M} \phi^+ + \mathcal{J} J^- B\bar{U} \mathcal{M} \phi^+)$$

et les calculs déjà indiqués montrent que :

$\bar{U} \mathcal{M} \phi^+ = \phi^+ - E J^+ B \phi$, et

$J^- B \bar{U} \mathcal{M} \phi^+ = J^- B \phi$,

d'où l'on déduit le résultat.

b) Utilisons maintenant la relation dans $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}$:

$(\bar{U},E) \circ (\mathcal{M} , J^+) = Id.$

Il suffit alors de montrer que $W \mathcal{M} \phi^+$ peut-être mis sous la forme :

$$W \mathcal{M} \phi^+ = (\bar{U},E) \circ (\mathcal{M} , J^+) (\phi^+ - EJ^+B\phi + E\mathcal{J}J^-B\phi, J^-B\bar{U}\mathcal{M}\phi^+ + \mathcal{J} J^-B\bar{U} \mathcal{M} \phi^+).$$

il a en effet été vu que, pour :

$\phi^+ \in L^2(R^+,H)$, $J^- B \bar{U} \mathcal{M} \phi^+ = J^- B \phi$ dans $\tilde{H}$, d'où

$$(\mathcal{M}\ ,\ J^+)\ (\phi^+ - E\,J^+ B\,\phi + E\,\mathcal{G}\,J^- B\,\phi\ ,\ \mathcal{G}\,J^- B\,\bar{U}\ \mathcal{M}\,\phi^+)$$
$$= (\mathcal{M}\,\phi^+\ ,\ \mathcal{G}\,J^- B\,\bar{U}\ \mathcal{M}\,\phi^+)$$

et l'expression donnée plus haut est bien celle de

$$W\,\mathcal{M}\,\phi^+ = (\bar{U},E)\ (\mathcal{M}\,\phi^+,\ \mathcal{G}\,J^- B\,\bar{U}\ \mathcal{M}\,\phi^+)$$

Les propriétés démontrées vont nous permettre de mettre le problème posé sous une forme équivalente, qui se prêtera mieux à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions.

2 . Equation intégrale associée au problème posé

$$\text{II}\quad \begin{cases} \mathcal{M}\,f = A\,f + \phi & x > o \\ J^+ B\,f = \mathcal{G}\,J^- B\,f & x = o \end{cases}$$

D'après le paragraphe précédent, nous pouvons ramener la résolution dans $L^2(R^+,H)\times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$ du problème II à la résolution dans $L^2(R^+,H)$ de l'équation intégrale (E)

$$(E)\ .\qquad f = W\,A\,f + W\,\phi\ .$$

En effet, si elle admet dans $L^2(R^+,H)$ une solution f, $A\,f$ est aussi dans $L^2(R^+,H)$; ceci a la conséquence suivante :

f est un élément du sous espace $\bar{V}$ de F, et donc :

f est solution forte du problème posé dans $L^2(R^+,H)$.

De manière analogue au chapitre I, la théorie des opérateurs compacts n'est pas directement applicable à l'étude de cette équation (E) :

l'opérateur $W\,A$, borné dans $L^2(R^+,H)$, n'est pas compact dans cet espace, les grandes valeurs de x interviennent en effet dans $\bar{U}$.

Nous sommes amenés à reprendre la troncature du chapitre I, pour les valeurs positives de x. Nous nous ramènerons alors à un opérateur compact, et à la résolution de l'équation modifiée.

3 . Equation modifiée

Soit $\overline{P}_N$ l'opérateur de troncature à $x > N$, et $\overline{Q}_N$ son complémentaire, agissant sur les fonctions définies pour $x \geq o$:

$$\overline{P}_N f = f \quad \text{pour} \quad x < N$$
$$= o \quad \text{pour} \quad x \geq N ,$$
$$\overline{Q}_N f = f \quad \text{pour} \quad x \geq N$$
$$= o \quad \text{pour} \quad x < N.$$

Etudions l'existence dans $L^2(R^+,H)$ d'un élément noté f_N, solution de :

$$(II_N) \quad \begin{cases} \mathcal{M} f_N - A \overline{P}_N f_N = \phi & x > o , \\ J^+ B f_N = \mathcal{G} J^- B f_N & x = o , \end{cases}$$

système que nous ramenons à la forme intégrale :

$$(E_N) \qquad f_N = W A \overline{P}_N f_N + W \phi \quad \text{dans} \quad L^2(R^+,H).$$

L'opérateur $\overline{L}_N$ est défini par :

$$\overline{L}_N = \nu(|\vec{\xi}|) - A \overline{P}_N ,$$

et ses propriétés permettront d'établir l'unicité de la solution dans $L^2(R^+,H)$.

Nous montrerons que l'opérateur $W A \overline{P}_N$ est compact dans $L^2(R^+,H)$, l'existence de f_N solution de l'équation intégrale (E_N) sera alors établie.

Le problème de la convergence de f_N quand $N \to \infty$ restera à traiter. Les hypothèses qur $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ seront faites au fur et à mesure, et conduiront au théorème énoncé ci-après, pour lequel nous alons définir l'opérateur $\overline{\omega}$, et $\overline{\epsilon}^{\pm}$.

Décomposons l'espace $\hat{H} = \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)^{-1}}$ en deux sous espaces $\hat{H}^+$ et $\hat{H}^-$ comme il a déjà été indiqué : $\hat{H}^{\pm} = J^{\pm}\hat{H}$, où la norme est la norme induite par $\hat{H}$.

Désignons maintenant par $\overline{\omega^{\pm}}$ et $\pi^{\pm}$ respectivement les opérateurs de projection dans $\hat{H}^{\pm}$ sur le sous espace de $\hat{H}^{\pm}$ formé par les fonctions orthogonales au premier invariant $\psi_o(\vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi})$, cette orthogonalité étant prise au sens du produit scalaire dans $\hat{H}$, et $\pi^{\pm}$ le complémentaire orthogonal de $\overline{\omega^{\pm}}$.

Nous pourrons alors écrire la décomposition :

$J^{\pm} B f = \overline{\omega^{\pm}} B f + \pi^{\pm} B f$, et, déduisons $\overline{\omega}$ et π :

$$B f = \overline{\omega} B f + \pi B f .$$

Cette décomposition prend son intérêt lorsqu'on considère les propriétés de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^*$:

$$J^+ \psi_o(\vec{\xi}) = \mathcal{J} J^- \psi_o(\vec{\xi})$$

$$J^- \psi_o(\vec{\xi}) = \mathcal{J}^* J^+ \psi_o(\vec{\xi})$$

Formulons sur $\mathcal{J}$ l'hypothèse classique suivante :

Il existe une constante $\sigma > o$, telle que :

$$(2) \qquad \sigma \, || \, \overline{\omega^-} B f \, ||^2_{\hat{H}^-} \leq - (\xi B f, B f)_H$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème qui sera démontré dans la suite de notre étude :

Théorème

Supposons que les opérateurs $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^*$ sont bornés de $\hat{H} = \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})^{-1}}$ dans $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$, et qu'il existe une constante σ positive vérifiant :

$$||J^- \overline{\omega} B f||^2_{\hat{H}} \leq - \frac{1}{\sigma} (\xi B f, B f)_H .$$

Il existe un élément $f(x,\vec{\xi})$ de la forme

$$f(x,\vec{\xi}) = \sum_{\alpha=o}^{\alpha=4} a_\alpha(x) \, \psi_\alpha(\vec{\xi}) + \chi(x,\vec{\xi})$$

tel que :

$\chi(x,\vec{\xi})$ et $\nu(|\vec{\xi}|)\chi$ appartiennent à $L^2(R^+,H)$,

$B\,\bar{\omega}\,\chi$ et $B\,a_\alpha(x)\,\psi_\alpha(\vec{\xi})$, $\alpha \neq o$, appartiennent à $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$,

$\frac{\partial}{\partial x}\,a_\alpha(x)$, α variant de o à 4, appartiennent à $\mathcal{H}^{-1}(o,\infty)$,

et qui vérifie, pourvu que $\phi(x,\vec{\xi})$ appartienne à $Q\,L^2(R^+,H)$:

dans $L^2(R^+H)$ $\qquad \xi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|)\chi - A\chi = \phi$

dans $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$ $\qquad J^+\,\bar{\omega}\,B\,f = \mathcal{J}\,J^-\,\bar{\omega}\,B\,f.$

4 . Unicité de la solution de l'équation modifiée dans $L^2(R^+,H)$

Lemme II.4.1

L'opérateur $\bar{L}_N$ vérifie pour tout x de R^+, l'inégalité :

$(\bar{L}_N f, f)_H \geq \mu_1 \,||Q\,f||_H^2$ où $\mu_1 = \inf(\mu, \nu|\phi|)$

Il suffit de reprendre la démonstration faite au chapitre I, paragraphe 4.

Proposition II.4.1

Tout élément de $L^2(R^+,H)$ vérifiant $f - W\,A\,\bar{P}_N\,f = o$ est nul dans $L^2(R^+,H)$.

D'après la remarque faite précédemment, un tel élément est dans l'espace $\bar{V}$, il vérifie donc :

$$\begin{cases} \xi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \bar{L}_N\,f = o & \text{dans } L^2(R^+,H) \\ J^+\,B\,f = \mathcal{J}\,J^-\,B\,f & \text{dans } \tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)} \end{cases},$$

Soit à fortiori :

$$(3)\quad \left(\!\left(\xi\,\frac{\partial f}{\partial x}\,,\,f\right)\!\right) + \left(\!\left(\bar{L}_N\,f,\,f\right)\!\right) = o\,.$$

Comme au chapitre I, nous noterons :

$\phi(x,\vec{\xi}) = A\,\overline{P}_N\,f$, qui est un élément de $L^2(R^+,H)$,

et nous allons chercher à quelles conditions, portant sur f,

nous avons $f = W\,\phi$.

Approchons $\phi(x,\vec{\xi})$ par une suite $\phi_\varepsilon(x,\vec{\xi})$ convergeant,

quand ε tend vers zéro, vers $\phi(x,\vec{\xi})$ dans $L^2(R^+,H)$, les

éléments $\phi_\varepsilon(x,\vec{\xi})$ étant réguliers à support compact dans

$x \geq o$.

Nous en déduisons la suite $f_\varepsilon(x,\vec{\xi})$:

$$f_\varepsilon(x,\vec{\xi}) = W\,\phi_\varepsilon(x,\vec{\xi}) ,$$

qui converge quand $\varepsilon \to o$ dans $L^2(R^+,H)$ et dans $\overline{V}$, vers

$W\,\phi\,(x,\vec{\xi})$, ceci d'après les propriétés de l'opérateur W.

Cherchons donc à quelles conditions la convergence de f_ε a

lieu vers f. Dans ce cas, $\xi \dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}$ converge vers $\xi \dfrac{\partial f}{\partial x}$

dans $L^2(R^+,H)$; d'autre part, $B\,W$ est continu de $L^2(R^+,H)$

dans $\tilde{H}_{\nu(|\vec{\xi}|)}$, donc dans $\tilde{H}$, ce qui montre que $B\,f_\varepsilon$ converge

vers $B\,f$ dans $\tilde{H}$. Nous pouvons donc évaluer :

$$((\xi \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ f)) = \lim_{\varepsilon\to o}\ ((\xi \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}, f_\varepsilon)) \text{ en calculant :}$$

$$((\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x},\ f_\varepsilon)) = \lim_{A\to\infty} \int_o^A (\xi \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}\ ,\ f_\varepsilon)_H\,dx$$

$$= \lim_{A\to\infty}\ (\xi\, f_\varepsilon(A),\ f_\varepsilon(A))_H - (\xi\, f_\varepsilon(o),\ f_\varepsilon(o))_H$$

L'annexe (A.3), (A.5) montre, d'après la forme de $f_\varepsilon(x,\vec{\xi})$

que $\lim\limits_{A\to\infty} (\xi\, f_\varepsilon(A),\ f_\varepsilon(A))_H = o$, et on en déduit :

$$((\xi \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ f)) = -\,(\xi\, Bf,\ Bf)_H .$$

La relation (3) vérifiée par f donne alors :

$$-\,(\xi\, Bf,\ Bf)_H + ((\overline{L}_N\, f,\ f)) = o .$$

Le propriété de convexité (2) de l'opérateur de réflexion montre que $-(\xi\, Bf,\, Bf)_H$ reste positif ou nul, et comme $((\overline{L}_N\, f,\, f))$ est lui aussi positif ou nul, on a simultanément :

$$((\overline{L}_N\, f,\, f)) = o\ , \quad \text{et}$$

$$-(\xi\, Bf,\, Bf)_H = o\ .$$

Comme au chapitre I , la première de ces deux relations montre que :

$$\overline{Q}_N\, f = o \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^+,H)$$

$$\overline{P}_N\, \mathcal{Q}\, f = o \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^+,H)\ ,$$

soit encore $L_N\, f = o$.

Etant donnée la relation $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + L_N\, f = o$, dans $L^2(\mathbb{R}^+,H)$, $\xi \frac{\partial f}{\partial x} = o$ dans $L^2(\mathbb{R}^+,H)$.

f est nul à l'infini, comme l'indique : $\overline{Q}_N\, f = o$. On en déduit donc que $f = o$ dans $L^2(\mathbb{R}^+,H)$.

5 . Compacité de l'opérateur $W\, A\, \overline{P}_N$ dans $L^2(\mathbb{R}^+,H)$.

L'opérateur $\overline{U}$ est singulier pour $\xi = o$, il est utile, comme au chapitre I, d'introduire l'opérateur δ_θ.

Définissons W_θ par la relation :

$$W_\theta = \delta_\theta\, \overline{U} + E\, \mathcal{J}\, J^-\, B\, \delta_\theta\, \overline{U}\ .$$

Nous démontrerons :

- d'une part que $W_\theta\, A\, \overline{P}_N$ est un opérateur compact dans $L^2(\mathbb{R}^+,H)$.

Il faudra montrer que chacun des opérateurs $\delta_\theta\, \overline{U}\, A\, \overline{P}_N$ et $E\, \mathcal{J}\, J^-\, B\, \delta_\theta\, \overline{U}\, A\, \overline{P}_N$ est compact.

- d'autre part que $W_\theta A$ converge en norme dans $L^2(R^+,H)$ vers $W A$ quand θ tend vers zéro, ceci uniformément en θ .

La référence [14] citée au chapitre I montrera bien alors que $W A \overline{P}_N$ est compact dans $L^2(R^+,H)$.

Lemme II.5.1

$$\left| \; |||\, \delta_\theta \overline{U} A f - \overline{U} A f \,|||^2_{L^2(R^+,H)} \leqslant C \sqrt{\theta} \; |||\, f \,|||^2_{L^2(R^+,H)} \right.$$

Il suffit dans la démonstration du Lemme I.5.1 , de restreindre les intervalles d'intégration en x à R^+, après n'avoir considéré que les valeurs positives de x.

Lemme II.5.2

L'opérateur $\delta_\theta \overline{U} A \overline{P}_N$ est compact dans $L^2(R^+,H)$

Là encore, le chapitre I nous donne la démonstration : la majoration de $\Phi_x(y, \vec{\xi})$, étudiée pour $x \geqslant o$, est valable, et il suffit de considérer :

$$\int_o^N dx \;\; ||A \, \delta_\theta \, \overline{U}^* \, (f_n - f) \, ||_H \;\; ,$$

pour N donné, quand n tend vers l'infini, et quand f_n converge faiblement vers f dans $L^2(R^+,H)$.

Lemme II.5.3

$$\left| \; |||\, (E \, \mathcal{G} \, J^- \, B \, \delta_\theta \, \overline{U} \, A - E \, \mathcal{G} \, J^- \, B \, \overline{U} \, A) f \,|||^2_{L^2(R^+,H)} \leqslant K \sqrt{\theta} \; |||\, f \,|||^2_{L^2(R^+,H)} \right.$$

L'opérateur E est, on l'a vu, borné de $\hat{H}$ dans $L^2(R^+,H)$.

$\mathcal{G}$ est borné de $\hat{H}$ dans lui-même. Il reste donc à montrer que :

$J^- \, B \, \delta_\theta \, \overline{U} \, A$ converge en norme dans $\hat{H}$ vers $J^- \, B \, \overline{U} \, A$,

quand θ tend vers zéro, soit :

$$||(J^- \, B \, \delta_\theta \, \overline{U} \, A - J^- \, B \, \overline{U} \, A) \, f||^2_{\hat{H}} \leqslant \int_{|\xi|<\theta} d\vec{\xi} \;\; \nu(|\vec{\xi}|)^{-2} \;\; \frac{1}{2} \;\; ||\, Af \,||^2_{L^2(R^+)} \;\; ,$$

ceci en reprenant la relation (1) qui conduit au Lemme II.1.1.

Nous reconnaissons l'expression (5) rencontrée au cours de la démonstration du Lemme I.5.1 , et nous en concluons :

$$|||\ W_\theta\ A - W\ A\ |||^2_{L^2(R^+,H)} \leq (K+C)\sqrt{\theta}\ .$$

Il reste à établir le lemme suivant, pour déduire la compacité :

Lemme II.5.4

L'opérateur $E\ g\ J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U}\ A\ \bar{P}_N$ est compact dans $L^2(R^+,H)$

Les propriétés de E et g que nous venons de rappeler réduisent la démonstration : montrons que :

$$J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U}\ A\ \bar{P}_N \text{ est compact de } L^2(R^+,H) \text{ dans } \hat{H}\ .$$

(on sait en effet que le produit d'un opérateur compact par un opérateur borné est compact).

Utilisons l'adjoint de $J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U}\ A\ \bar{P}_N$, soit $(J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U}\ A\ \bar{P}_N)^*$, opérant de $\hat{H}$ dans $L^2(R^+,H)$, pour les raisons citées au chapitre I.

Déterminons d'abord cet adjoint, ceci en cherchant l'adjoint de $J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U}$, qui opère de $\hat{H}$ dans $L^2(R^+,H)$. Nous aurons alors, puisque A est auto adjoint dans H :

$$(J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U}\ A\ \bar{P}_N)^* = \bar{P}_N\ A\ (J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U})^*\ ,$$

Prenons deux éléments, l'un f, quelconque dans $L^2(R^+,H)$, l'autre h, quelconque dans $\hat{H}$, et déterminons $(J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U})^*$ tel que :

$(J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U}\ f, h)_{\hat{H}} = ((\ f\ ,\ (J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U})^*\ h\ ))$, soit

$$\int_{\xi<-\theta} d\vec{\xi}\ |\xi|\ \nu(|\vec{\xi}|)^{-1}\ (\tfrac{-1}{\xi}) \int_0^\infty \exp\{\frac{\nu(|\vec{\xi}|)}{\xi}\ y\}\ f(y,\vec{\xi})\ dy\ h(\vec{\xi})$$

$$= ((\ f(y,\vec{\xi}),\ \delta_\theta\ J^-\ E^*\ \nu(|\vec{\xi}|)^{-1}\ h\ (\vec{\xi})\ ))\ ,$$

c'est à dire :

$$(J^-\ B\ \delta_\theta\ \bar{U})^* = J^-\ \delta_\theta\ \nu(|\vec{\xi}|)^{-1}\ E^*$$

Pour montrer la compacité de $P_N A J^- B \delta_\theta \nu(|\vec{\xi}|)^{-1} E^*$, prenons une suite h_n convergeant faiblement vers h dans $\hat{H}$, et établissons que :

Pour tout x, $A J^- \delta_\theta \nu(|\vec{\xi}|)^{-1} E^* (h_n - h)$ converge fortement dans H. Il suffit de montrer, A étant compact dans H, que $J^- \delta_\theta \nu(|\vec{\xi}|)^{-1} E^* (h_n - h)$ converge faiblement dans H.

Soit un élément $\phi(\vec{\xi})$ de H, l'expression :

$$(J^- \delta_\theta \nu(|\vec{\xi}|)^{-1} E^* (h_n - h), \phi(\vec{\xi}))_H = \int_{\xi<-\theta} \nu(|\vec{\xi}|)^{-1} \phi(\vec{\xi}) \exp\{\frac{\nu(\vec{\xi})}{\xi} x\} (h_m - h)(\vec{\xi}) d\vec{\xi}$$

converge vers zéro dès que $(h_n - h)$ converge faiblement vers zéro dans $\hat{H}$, en effet :

$\Upsilon(\theta - \xi) \nu(|\vec{\xi}|)^{-1} \phi(\vec{\xi}) \exp\{\frac{\nu(|\vec{\xi}|)}{\xi} x\}$ est un élément de $\hat{H}$ pour chaque x, comme le montre le calcul de sa norme dans $\hat{H}$.

$$||\nu(|\vec{\xi}|)^{-1} \phi(\vec{\xi}) \exp(\frac{\nu(|\vec{\xi}|)}{\xi} x) \Upsilon(-\xi)||^2_{\hat{H}} = \int_{\xi<o} d\vec{\xi}\, \phi^2(\vec{\xi}) |\xi| \nu(|\vec{\xi}|)^{-1} \exp\{2\frac{\nu(|\vec{\xi}|)}{\xi} x\}.$$

$$\leq \int_{\xi<o} d\vec{\xi}\, \phi^2(\vec{\xi}) \cdot \frac{1}{\nu(o)} .$$

$A J^- \delta_\theta \nu(|\vec{\xi}|)^{-1} E^* (h_m - h)$ converge donc bien fortement vers zéro dans H pour tout x, quand n tend vers l'infini, et $\bar{P}_N A J^- \delta_\theta \nu(|\vec{\xi}|)^{-1} E^*$ est compact, pour N fixé, de $\hat{H}$ dans $L^2(R^+,H)$.

Proposition II.5.1

L'opérateur $W A \bar{P}_N$ est compact dans $L^2(R^+,H)$

Théorème II.5.1

L'équation $f_N = W A \bar{P}_N f_N + W \phi$ a une solution unique dans $L^2(R^+,H)$, dès que ϕ est un élément de $L^2(R^+,H)$; la solution f_N appartient à l'espace F, f_N est donc solution de $\mathbb{I}_N$:

$$\Pi_N \quad \begin{cases} \xi \dfrac{\partial f_N}{\partial x} + \overline{L}_N f_N = \phi & \text{dans } L^2(R^+,H) \\ J^+ B f_N = g J^- B f_N & \text{dans } \hat{H} \end{cases}$$

Etudions la convergence de $f_N(x,\vec{\xi})$ quand N tend vers l'infini. Décomposons f_N sur $\mathcal{P} L^2(R^+,H)$ et $\mathcal{Q} L^2(R^+,H)$:

$$f_N(x,\vec{\xi}) = \psi_N(x,\vec{\xi}) + \chi_N(x,\vec{\xi})$$

$$= \sum_{\alpha=o}^{\alpha=4} a_{\alpha N}(x)\, \psi_\alpha(\vec{\xi}) + \chi_N(x,\vec{\xi}).$$

6 . Convergence de $f_N(x,\vec{\xi})$ quand N tend vers l'infini

Nous allons d'abord établir des majorations à priori, qui vont être le point de départ de l'étude des convergences de $\psi_N(x,\vec{\xi})$ et $\chi_N(x,\vec{\xi})$.

L'hypothèse selon laquelle $\phi(x,\vec{\xi})$ est un élément de $\mathcal{Q} L^2(R^+,H)$, jusqu'ici inutilisée, va maintenant être fondamentale ; rappelons aussi l'existence d'un nombre $\sigma > o$ tel que $\sigma \,||\, \overline{\omega} - Bf \,||^2_{\hat{H}} \leq -(\xi Bf, Bf)_H$.

Lemme II.6.1

Si $\phi(x,\vec{\xi})$ est un élément de $\mathcal{Q} L^2(R^+,H)$, la solution f_N de l'équation $f_N = W A \overline{P}_N f_N + W\phi$ dans $L^2(R^+,H)$, vérifie les majorations suivantes :

$$(4) \qquad ||| \chi_N ||| \leq \frac{1}{\mu_1} ||| \phi |||$$

$$(5) \qquad || \overline{\omega} - B f_N ||^2_{\hat{H}} \leq \frac{1}{\sigma \mu_1} |||\phi|||^2$$

$$(6) \qquad |||\overline{Q}_N \psi_N||| \leq \frac{1}{\nu(o)\mu_1} |||\phi|||$$

Des relations

$$\xi \frac{\partial f_N}{\partial x} + \overline{L}_N f_N = \phi \quad \text{dans } L^2(R^+,H) \text{ , et}$$

$$J^+ B f_N = g J^- B f_N \quad \text{dans } \hat{H}, \text{ nous déduisons}$$

$$((\xi \frac{\partial f_N}{\partial x} , f_N)) + ((\overline{L}_N f_N , f_N)) = ((f_N , \phi)) = ((\chi_N , \phi)) ,$$

c'est à dire, en explicitant le produit scalaire dans $L^2(R,H)$:

$$\int_o^\infty (\xi \frac{\partial f_N}{\partial x} , f_N)_H \, dx + \int_o^\infty (\overline{L}_N f_N, f_N)_H \, dx = ((\chi_N, \phi)) .$$

Le premier terme fait apparaitre la contribution à la frontière :

$$\int_o^\infty (\xi \frac{\partial f_N}{\partial x} , f_N)_H \, dx = (\xi f_N, f_N)_H \Big|_{x = +\infty} - (\xi Bf_N, Bf_N)_H .$$

Il est à remarquer que f_N est de la forme $f_N = W h_N$, où h_N appartient à $L^2(R^+,H)$. Le résultat montré en annexe A2 et A3 est alors applicable : $(\xi f_N, f_N)_H (x) \longrightarrow o$ quand $x \longrightarrow \infty$.

Etudions maintenant le deuxième terme :

$$((\overline{L}_N f_N, f_N)) = \int_o^N (L f_N, f_N)_H \, dx + \int_N^\infty ||\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} f_N||_H^2 \, dx ,$$

et l'existence de $((\overline{L}_N f_N, f_N))$ montre l'existence de chacun des deux termes, puisqu'ils sont tous deux positifs.

La majoration $(\overline{I}h, h)_H > \mu \, ||\overline{Q} h||_H^2$ conduit à :

$$-(\xi Bf_N, Bf_N)_H + \mu ||| \overline{P}_N \chi_N |||^2 + |||\overline{Q}_N \nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} f_N|||^2 < |||\chi_N||| \, |||\phi||| ,$$

et nous allons pouvoir conclure :

Tous les termes du premier membre sont positifs, chacun d'eux est donc borné par $|||\chi_N||| \, |||\phi|||$.

La propriété démontrée au Lemme II.4.1 permet d'écrire aussi la relation :

$$- (\xi Bf_N, f_N)_H + \mu_\perp |||\chi_N|||^2 \leq |||\chi_N||| \, |||\phi||| ,$$

et la première majoration concernant $|||\chi_N|||$ s'obtient alors immédiatement, l'hypothèse concernant $-(\xi Bf_N, f_N)_H$ conduit à la deuxième majoration.

Il suffit de reprendre

$$|||\overline{Q}_N \nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} f_N|||^2 \leq |||\chi_N||| \, |||\phi||| , \text{ et}$$

d'utiliser le fait que $\nu(|\vec{\xi}|)$ est positif et borné inférieurement par $\nu(o)$ pour obtenir la majoration concernant $\bar{Q}_N \psi_N$.

Proposition II.6.1

La suite $\bar{Q}_N \psi_N$ converge faiblement vers zéro dans $L^2(R^+,H)$ quand N tend vers l'infini.

La démonstration est analogue à celle de la proposition I.6.2

Proposition II.6.2

Il existe une suite de nombres réels, N_K, telle que χ_{N_K} converge faiblement dans $L^2(R^+ H)$ vers un élément χ de $\mathcal{Q}\, L^2(R^+,H)$, et que $\bar{\omega}\, B f_{N_K}$ converge faiblement dans $\hat{H}$; de plus, $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2}\, \chi_{N_K}$ converge faiblement dans $L^2(R^+,H)$ vers l'élément $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2}\, \chi$.

La majoration $|||\chi_N||| \leq \frac{1}{\mu_1} |||\phi|||$, montre qu'il existe une suite de réels N_k, tels que :

χ_{N_k} converge faiblement dans $L^2(R^+,H)$ quand N_k tend vers l'infini. :

La continuité des opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ montre que cette convergence a lieu dans $\mathcal{Q}\, L^2(R^+,H)$, notons alors $\chi(x,\vec{\xi})$ la limite faible de χ_{N_k} .

La majoration $|| \bar{\omega}- B\, f_N ||_H^2 \leq \frac{1}{\sigma\mu_2} |||\phi|||^2$ nous permet d'extraire maintenant de la suite N_k une suite de réels N_{K_1} tels que :

$\bar{\omega}- B\, f_{N_{K_1}}$ converge faiblement dans $\hat{H}^-$ quand N_{K_1} tend vers l'infini.

Rappelons que $\mathcal{J}$ est supposé borné de $\hat{H}^-$ dans $\hat{H}^+$: de ce fait la suite $\bar{\omega}^+ B\, f_{N_{K_1}}$ converge faiblement dans $\hat{H}^+$. La limite faible de

$\overline{\omega}^-$ B $f_{N_{K_1}}$ est un élément de $\hat{H}^-$, que la continuité de l'opérateur $\overline{\omega}$ permet de noter $\overline{\omega}^-$ Bf. De même, nous pouvons noter $\overline{\omega}^+$ Bf la limite faible de $\overline{\omega}^+$ $Bf_{N_{K_1}}$ dans $\hat{H}^+$. L'unicité de la limite faible, compte tenu de la relation : $\overline{\omega}^+$ Bf_{N_K} = $\mathcal{J}$ $\overline{\omega}^-$ Bf_{N_K}, montre que nous avons, entre les notations introduites, la relation :

$$\overline{\omega}^+ \text{ Bf} = \mathcal{J} \overline{\tilde{\omega}}^- \text{ Bf} .$$

Montrons maintenant que $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2}$ χ_N reste borné dans $L^2(R^+,H)$: reprenons la démonstration du corollaire I.6.1, où nous allons remplacer L_N par $\overline{L}_N$, Q_N par $\overline{Q}_N$; il y a lieu d'utiliser la majoration : $((\overline{L}_N f_N, f_N)) \leq ((\phi, \chi_N))$, au lieu de l'égalité $((L_N f_N, f_N)) = ((\mathcal{J}, \chi_N))$ utilisée au corollaire I.6.1, ceci grâce au fait que $-(\xi \text{ Bf}, \text{Bf})_H$ reste positif.

La conclusion cherchée est que de la suite N_{K_1}, nous pouvons extraire une sous suite N_K, telle que, pour cette sous suite, toutes les convergences faibles indiquées dans l'énoncé de la proposition, aient lieu simultanément.

Notons qu'une démonstration identique à celle faite au chapitre I, montre que l'élément $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2}$ χ appartient à $L^2(R^+,H)$, et qu'il est limite faible dans cet espace de $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2}$ χ_{N_K} .

Etudions de plus près le phénomène à la paroi ; afin d'étudier la convergence de B χ_N et B ψ_N dans $\hat{H}$, formulons une nouvelle hypothèse :

Hypothèse

A tout opérateur de réflexion $\mathcal{J}$, on peut associer un système de cinq fonctions $\Phi_\alpha(\vec{\xi})$, α variant de 0 à 4, telles que :

$\Phi_\alpha(\vec{\xi})$ et $\vec{\xi}\,\Phi_\alpha(\vec{\xi})$ appartiennent à H ,

$J^- \Phi_\alpha(\vec{\xi}) = \mathcal{J}^* J^+ \Phi_\alpha(\vec{\xi})$,

$(\xi \Phi_\alpha \Psi_\beta)_H = \delta_{\alpha\beta}$ si α et β ne sont pas tous deux nuls

$(\xi \Phi_o, \Psi_o)_H = o$

Proposition II.6.3

Pour $\alpha \neq o$, les éléments $B(a^{\alpha}_{N_K}(x)\ \psi^{\alpha}(\vec{\xi}) = a^{\alpha}_{N_K}(o)\ \psi^{\alpha}(\vec{\xi})$ appartiennent à $\tilde{H}^{-1}_{\nu(\vec{\xi})}$, et
$\frac{d}{dx} a^{\alpha}_{N_K}$ converge dans $\mathcal{H}^{-1}(o,\infty)$ pour N_K tendant vers l'infini
Pour $\alpha = o$, $\frac{d}{dx} a^{o}_{N_K}$ converge dans $\mathcal{H}^{-1}(o,\infty)$.

L'élément f_N défini par (f_{N^+}, Bf_N) appartient à l'espace $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$, comme le montrent les propriétés de l'opérateur W : f_N se met en effet sous la forme :

$$f_N = W\ h_N\ , \quad \text{où} \quad h_N = A\ \overline{P}_N\ f_N + \phi\ ,$$

c'est à dire où h_N est élément de $L^2(R^+,H)$.

Pour tout élément $h(x,\vec{\xi})$ de $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$, nous pouvons alors écrire :

$$((\mathcal{M} f_N - A\ \overline{P}_N\ f_N,\ h(x,\vec{\xi})\ )) = ((\ f_N,\ \mathcal{M}^*\ h\ )) - ((\ A\ \overline{P}_N\ f_N,\ h\ ))-(\xi\ Bh,\ Bf_N)_H$$

Choisissons maintenant un élément $h(x,\vec{\xi})$ qui nous permettra d'exploiter l'hypothèse faite sur l'opérateur $\mathcal{G}$, pour mettre en évidence ψ_{N_K} :

$$h(x,\vec{\xi}) = \Phi_{\alpha}(\vec{\xi})\ \theta(x)\ , \quad \text{où} \quad \theta(x) = (\theta^{+}(x),\ \theta(o)\ ) \text{ est}$$

un élément de $\mathcal{H}^1(R^+) \times R$, ($\mathcal{H}^1(R^+)$ étant l'espace des éléments de $\mathcal{H}^1(R)$ restreints à R^+) .

D'après les propriétés de $\Phi_{\alpha}(\vec{\xi})$ et f_N relativement à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$, nous avons :

$$(\xi\ \Phi_{\alpha}(\vec{\xi})\ \theta(o),\ Bf_N)_H = o\ ,$$

c'est à dire :

$$((\mathcal{M} f_N - A\ \overline{P}_N\ f_N,\ \Phi_{\alpha}(\vec{\xi})\ \theta^{+}(x)\ )) = ((\ f_N,\ (\mathcal{M}^* - A\ \overline{P}_N)\ \Phi_{\alpha}(\vec{\xi})\ \theta^{+}(x)\ ))$$

Le premier membre de cette relation a un sens pour toute valeur de N, il vaut en effet $((\ \phi_{,}\ \Phi_{\alpha}(\vec{\xi})\ \theta^{+}(x)\ ))$.

Il est donc de même du second membre, où nous allons maintenant tenir compte des convergences faibles établies jusqu'à présent :

χ_{N_K} converge faiblement quand N_K tend vers l'infini dans $L^2(R^+,H)$; $\Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x)$ est élément de V^*. Ceci montre d'une part que :

$((A \overline{P}_{N_K} \chi_{N_K} , \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x)))$ converge ,

et d'autre part que :

$((\chi_{N_K} , \mathcal{M}^* \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x)))$ converge ,

c'est à dire :

$((\chi_{N_K} , (\mathcal{M}^* - A \overline{P}_{N_K}) \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x)))$ converge quand N_K tend vers l'infini.

La conclusion cherchée est la suivante : pour tout N l'expression suivante a un sens, et converge pour la sous suite N_K :

$$((\psi_N,(\mathcal{M}^* - A\overline{P}_N) \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x))) = ((\psi_N, (- \xi \frac{\partial}{\partial x} + \nu(|\vec{\xi}|)\overline{Q}_N) \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x))) .$$

Rappelons que $\overline{Q}_N \psi_N$ converge faiblement vers zéro dans $L^2(R^+,H)$, ce qui implique que :

$((\psi_{N_K}, \xi \frac{\partial}{\partial x} \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x)))$ a un sens, et converge quand N_K tend vers l'infini.

Nous connaissons par ailleurs l'existence du terme $< \xi \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N_K}, \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x) >_{V(R^+,H)}$, nous pouvons donc conclure qu'il existe un élément de $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})-1}$, que l'on notera $B\ \psi_{N_K}$, satisfaisant pour tout N_K :

$$< \xi \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N_K}, \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x) >_{V(R^+,H)} + (\xi B \psi_{N_K}, \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta(o))_H$$

$$= - ((\psi_{N_K}, \xi \frac{\partial}{\partial x} \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta+(x))) .$$

Remarquons que $B\ \psi_{N_K}$ n'est que partiellement défini dans $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})-1}$ par cette relation : il n'est défini que par l'intermédiaire de :

$(\xi\ B\ \psi_{N_K},\ \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta(o)\ )_H$, pour α variant de 0 à 4, et pour tout $\theta(o)$ de R.

Nous savons de plus que, quand N_K tend vers l'infini,

$< \xi \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N_K},\ \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x) >_{V(R^+,H)} + (\xi\ B\ \psi_{N_K},\ \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta(o)\ )_H$ a une limite.

Prenons alors les valeurs successives de α , la valeur $\alpha = o$ devra être traité séparément :

$$< \xi \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N_K},\ \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ \theta^+(x) >_{V(R^+,H)} = \sum_\beta < \frac{\partial}{\partial x} a^\beta_{N_K}(x), \theta^+(x) >_{\mathcal{H}^1(R^+)} (\xi\ \psi_\beta(\vec{\xi})\ \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ )_H$$

Pour $\alpha \neq o$, on peut définir des éléments $B\ a^\alpha_{N_K}$, par :

$B\ a^\alpha_{N_K} = (B\ \psi_{N_K},\ \xi\ \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ )_H$ tels que l'on ait :

$$< \frac{d}{dx} a^\alpha_{N_K},\ \theta^+(x) >_{\mathcal{H}^1(R^+)} + B\ a^\alpha_{N_K}\ \theta(o) = -\ (a^\alpha_{N_K},\ \frac{d\theta(x)}{dx})\ ,$$

et l'expression :

$< \frac{d}{dx} a^\alpha_{N_K},\ \theta^+(x) >_{\mathcal{H}^1(R^+)} + B\ a^\alpha_{N_K}\ \theta(o)$ a une limite quand N_K tend vers l'infini, pour tout $(\theta^+(x),\ \theta(o)\ )$ élément de $\mathcal{H}^1(R^+) \times R$.

La notation $(B\ \psi_{N_K},\ \xi\ \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ )_H = B\ a^\alpha_{N_K}$ pour $\alpha \neq o$ est justifiée simplement par :

$$\psi_{N_K} = \sum_\alpha a^\alpha_{N_K}(x)\ \psi_\alpha(\vec{\xi})$$

$$B\ \psi_{N_K} = \sum_\alpha a^\alpha_{N_K}(o)\ \psi_\alpha(\vec{\xi}) = \sum_\alpha B\ a^\alpha_{N_K}(x)\ \psi_\alpha(\vec{\xi})\ ,\ \text{et}$$

$B\ a^\alpha_{N_K} = (\xi\ B\ \psi_{N_K},\ \Phi_\alpha(\vec{\xi})\ )_H$ compte tenu de l'hypothèse concernant les $\Phi_\alpha(\vec{\xi})$.

Prenons maintenant $\theta(x) = (\theta^+(x),\ \theta(o)\ )$ tout d'abord tel que : $\theta(o) = o$, puis tel que $\theta(o) \neq o$, nous en déduisons :

Pour $\alpha \neq o$ a) $\frac{d}{dx} a^\alpha_{N_K}$ converge vers un élément A^α de $\mathcal{H}^{-1}(o,\infty)$ faiblement

b) $B\ a^\alpha_{N_K}$ a une limite quand $N_K \to \infty$, soit $a^\alpha(o)$ cette limite.

Terminons l'étude par le cas $\alpha = o$, ceci en tenant compte des résultats acquis pour $\alpha \neq o$.

Prenons un élément $h(x,\vec{\xi})$ de $V(R^+,H) \times \tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$ de la forme $h(x,\vec{\xi}) = \phi(\vec{\xi})\ \theta(x)$, où $\theta(x)$ appartient à $\mathcal{H}^1(R^+) \times o$, c'est à dire $\theta(x) = (\theta^+(x), o)$, où $\theta(x)$ appartient à $\mathcal{H}_o^1(R^+)$, et supposons que $\phi(\vec{\xi})$, $\nu(\vec{\xi})\ \phi(\vec{\xi})$ sont éléments de l'espace H. Les résultats précédents concernant $\alpha \neq o$, ont pour conséquence :

$$< \frac{d}{dx}\ a^o_{N_K}(x),\ \theta^+(x) >_{\mathcal{H}^1(R^+)} = (a^o_{N_K}(x)\ ,\ \frac{d\theta^+(x)}{dx})\ ,\ \text{et}$$

cette expression converge pour tout $\theta^+(x)$ élément de $\mathcal{H}_o^1(R^+)$, c'est à dire : $\frac{d}{dx}\ a^o_{N_K}(x)$ converge vers un élément A^o de $\mathcal{H}^{-1}(R^+)$ faiblement.

Il est à remarquer que la structure du problème ne permet pas d'obtenir $a^o_{N_K}(x)$ à la frontière, ceci est dû à la particularité que présente l'invariant des rencontres d'indice zéro, pour l'opérateur de réflexion.

Corollaire II.6.1

Quand N_K tend vers l'infini, $\bar{\omega}\ B\ \psi_{N_K}$ et $\bar{\omega}\ B\ \chi_{N_K}$ convergent faiblement dans $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}{}^{-1}$.

Nous avons vu, comme conséquence directe des majorations, que $\bar{\omega}\ B\ f_{N_K}$ converge faiblement dans $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}{}^{-1}$. L'étude précédente montre que $\bar{\omega}\ B\ \psi_{N_K}$ a pour limite, quand N_K tend vers l'infini, l'élément $\sum_{\alpha=o} \psi_\alpha\ a^\alpha(o)\ (\psi_\alpha(\vec{\xi})\ ,\ \psi_o(\vec{\xi}))_{\hat{H}}$ cette limite est une limite forte dans $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}{}^{-1}$, ce qui permet de conclure à la convergence faible de $\bar{\omega}\ B\ \chi_{N_K}$ dans $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}{}^{-1}$.

Corollaire II.6.2

$\xi\ \frac{\partial}{\partial x}\ \psi_{N_K}$ converge dans $(V(R^+,H) \times o)'$ vers $\sum_\alpha \xi\ A^\alpha(x)\ \psi_\alpha(\vec{\xi})$

Reprenons la démonstration faite au chapitre I, permettant de passer de la convergence de $\frac{d}{dx} \alpha_{N_K}(x)$ dans $\mathcal{H}^{-1}(R)$ à celle de $\xi \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N_K}$, et prenons pour éléments $\phi(x,\vec{\xi})$ des éléments de $V(R^+,H) \times o$.

Nous pouvons étudier maintenant la limite de $\nu(|\vec{\xi}|)\ \chi_{N_K}$, dans $L^2(R^+,H)$, quand N_K tend vers l'infini.

Proposition II.6.4

Si l'opérateur de réflexion $\mathcal{G}$ est borné de $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})^{-1}}$ dans $\tilde{H}_{\nu(\vec{\xi})}$, l'élément $\nu(\vec{\xi})\ \chi_{N_K}$ converge dans $L^2(R^+,H)$ faible vers $\nu(\vec{\xi})\ \chi$, élément de $L^2(R^+,H)$.

Dans $V'(R^+,H)$, nous pouvons écrire pour tout N :

$$\xi \frac{\partial \psi_N}{\partial x} + \mathcal{M}\ \chi_N = A\ \overline{P}_N\ \chi_N - \nu(|\vec{\xi}|)\ \overline{Q}_N\ \psi_N + \phi$$

Appliquons tout d'abord l'opérateur W. Nous avons alors dans $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}$:

$$W\ \xi \frac{\partial \psi_N}{\partial x} + W\ \mathcal{M}\ \chi_N = W\ (A\ \overline{P}_N\ \chi_N + \phi - \nu(|\vec{\xi}|)\ \overline{Q}_N\ \psi_N)$$

et projetons maintenant cette relation dans l'espace $L^2(R^+,H)$, ceci en appliquant l'opérateur P de projection de $L^2(R^+,H) \times \tilde{H}$ sur $L^2(R^+,H)$:

$$P\ W\ \xi \frac{\partial \psi_N}{\partial x} + P\ W\ \mathcal{M}\ \chi_N = P\ W\ (A\ \overline{P}_N\ \chi_N + \phi - \nu(\vec{\xi})\ \overline{Q}_N\ \psi_N)$$

Nous avons vu que $A\ \overline{P}_{N_K}\ \chi_{N_K} + \phi - \nu(\vec{\xi})\ \overline{Q}_{N_K} \psi_{N_K}$ avait une limite faible dans $L^2(R^+,H)$. D'après les propriétés de W (Lemme II.1.9 et proposition II.1.7), ceci entraine que : $\nu(|\vec{\xi}|)\ P\ W\ (A\ \overline{P}_{N_K}\ \chi_{N_K} + \phi - \nu(\vec{\xi}) \overline{Q}_{N_K} \psi_{N_K})$ a aussi une limite faible dans $L^2(R^+,H)$, et il en est de même de :

$\nu(\vec{\xi})\ P\ W \frac{\partial \psi_{N_K}}{\partial x} + \nu(\vec{\xi})\ P\ W\ \mathcal{M}\ \chi_N$.

Le corollaire II.6.2 et la forme de ψ_{N_K}, pour les grandes valeurs de $|\vec{\xi}|$ montrent que $\nu(\vec{\xi})\ P\ W \frac{\partial}{\partial x} \psi_{N_K}$ converge faiblement dans $L^2(R^+,H)$. Il reste donc à étudier $\nu(\vec{\xi})\ P\ W\ \mathcal{M}\ \chi_{N_K}$. Or, d'après les propriétés de W et $\mathcal{M}$:

$$\nu(\vec{\xi})\ P\ W\ \mathcal{M}\ \chi_{N_K} = \nu(\vec{\xi})\left[\chi_{N_K} + E\ (J^+\ B\ \chi_{N_K} - \mathcal{G}\ J^-\ B\ \chi_{N_K})\right] \text{ dans } L^2(R^+,H)$$

Le corollaire II.6.1 montre que $\nu(|\vec{\xi}|)\ E\ (J^+\ B\ \chi_{N_K} - \mathcal{G}\ J^-\ B\ \chi_{N_K})$ converge faiblement dans $L^2(R^+,H)$, en effet :

$$J^+\ B\ \chi_{N_K} - \mathcal{G}\ J^-\ B\ \chi_{N_K} = \bar{\omega}+\ B\ \chi_{N_K} - \mathcal{G}\ \bar{\omega}-\ B\ \chi_{N_K}\ .$$

Il s'en suit alors que :

$$\nu(\vec{\xi})\ \chi_{N_K} \text{ converge faiblement dans } L^2(R^+,H).$$

Reprenant le raisonnement fait à la proposition II.6.2, remplaçant $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2}$ par $\nu(|\vec{\xi}|)$, il est immédiat d'établir que l'élément $\nu(|\vec{\xi}|)\chi$ appartient à $L^2(R^+,H)$ et est la limite faible de $\nu(|\vec{\xi}|)\ \chi_{N_K}$ quand N_K tend vers l'infini.

Corollaire II.6.3

$\xi\ \frac{\partial}{\partial x}\ f_{N_K}$ a une limite faible dans $L^2(R^+,H)$ de la forme

$\xi(\frac{\partial}{\partial x}\ \chi + A^\alpha\ \psi_\alpha(\vec{\xi})\ )$

Il suffit de tenir compte des résultats obtenus.

Le théorème annoncé en fin de paragraphe 3 est donc bien démontré.

4 . Cas d'une condition de réflexion non homogène à la paroi .

Le phénomène de réflexion est alors décrit par la relation

$$J^+\ Bf = \mathcal{G}\ J^-\ Bf + \Phi^+$$

où Φ^+ est un terme de source, fonction de $\vec{\xi}$, élément de H, et possédant une symétrie cylindrique en $\vec{\xi}$ d'axe ξ .

La résolution du problème précédent invite à considérer ce problème comme superposition, et à chercher f sous la forme

$$f = f_1 + E\,\Phi^+ \quad ,$$

f_1 est alors solution de :

$$\begin{cases} (\mathcal{M} - A) f_1 = \phi + A\,E\,\Phi^+ , & x > 0 \\ J^+ B f_1 = \mathcal{G}\, J^- B f_1 . \end{cases}$$

Nous sommes ramenés au problème homogène, où le second membre est maintenant $\phi + A\,E\,\Phi^+$, et la condition que nous supposons remplie, et pour laquelle le théorème d'existence et d'unicité du paragraphe 3 s'applique est :

$$\phi + A\,E\,\Phi^+ \text{ est élément de } \mathcal{Q}\, L^2(R^+, H).$$

EQUATION LINEAIRE, NON STATIONNAIRE

SUR LA DROITE DANS $L^2(R,H)$

Le problème sera traité dans $L^2(R,H)$, d'abord avec condition initiale, dans le cas de l'équation homogène, puis, dans le cas non homogène, avec un second membre orthogonal aux invariants des rencontres.

La méthode utilisée fait largement appel à la théorie des semi groupes d'opérateurs : il est bon d'en rappeler les principaux traits. Dans ce chapitre, il suffira de se reporter au livre Dunford Schwartz [14]; dont nous emploierons les théorèmes et définitions suivants :

1 - Définition

On appelle semi groupe fortement continu, dans un espace de Banach X, un opérateur $T(t)$, défini pour $o < t < \infty$, tel que :

$T(t+s) = T(t)\ T(\infty)$ pour s et $t > o$,

$T(o) = I$

$T(t)\ x$ est continu en t pour tout élément x du Banach X.

2 - Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire M fermé, de domaine dense dans l'espace X, engendre un semi groupe $T(t)$ fortement continu, tel que :

$$||T(t)||_X \leq e^{\omega t} \quad , \text{ pour } \omega \text{ réel,}$$

est que :

$$||R(\lambda, M)||_X \leq (\lambda - \omega)^{-1} \quad , \text{ pour } \lambda > \omega \ ,$$

où

$$R(\lambda, M) = (\lambda I - M)^{-1} \ .$$

Si x_o appartient au domaine de M dans X, il en est de même de $T(t)x_o$ et :

$$\frac{d}{dt} T(t)x_o = M\,T(t)x_o = T(t)\,M\,x_o$$

On sera amené à utiliser le théorème de perturbation suivant, sui n'est qu'un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général, exposé dans le livre de Kato [2], et que nous n'énoncerons pas sous sa forme générale :

3 - Théorème

Soit un opérateur P, dont le domaine contient le domaine de M dans X ; si de plus P est un opérateur borné, la résolvante de $M + P$ vaut :

$$R(\lambda, M + P) = R(\lambda, M) \sum_{n=o}^{\infty} (P\,R(\lambda, M))^n ,$$

et $(M + P)$ est générateur d'un semi groupe $T(t, M + P)$ qui vérifie :

$$T(t, M+P)x_o = T(t, M)x_o + \int_o^t T(t-\tau, M)P\,T(\tau, M+P)x_o\,d\tau ,$$

où $T(t, M)$ désigne le semi groupe engendré par M.

1 - Equation homogène aux valeurs initiales dans $L^2(R,H)$

Soit à résoudre l'équation :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f - Af = o , & t > o \\ f(x, \vec{\xi}, t)\Big|_{t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) \end{cases}$$

où $f_o(x, \vec{\xi})$ est un élément de $L^2(R,H)$.

Nous nous proposons de résoudre ce problème dans l'espace $L^2(R,H)$; les notations sont celles du chapitre I, et nous allons montrer que la résolution peut se faire par un semi groupe de contraction dans $L^2(R,H)$. Les propriétés des opérateurs A et $\mathcal{M}$ rendent la théorie des perturbations applicable.

Résolvons tout d'abord le problème intermédiaire suivant :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f = o , & t > o, \\ f(x, \vec{\xi}, t)\Big|_{t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) \end{cases}$$

Au chapitre I, il a été établi que le domaine de l'opérateur $\mathcal{M}$ est l'espace $V(R,H)$, qui est dense dans $L^2(R,H)$. Il suffit donc de chercher l'opérateur résolvant, $\mathcal{R}(\lambda, -\mathcal{M})$ de l'opérateur $-\mathcal{M}$, c'est à dire d'inverser (sous réserve d'existence), l'opérateur $\mathcal{M}_\lambda$:

$$\mathcal{M}_\lambda = \lambda I + \mathcal{M}$$
$$= \xi \frac{\partial}{\partial x} + (\nu(|\vec{\xi}|) + \lambda)$$

$\mathcal{M}_\lambda$ a pour inverse l'opérateur $U_\lambda = R(\lambda, -\mathcal{M})$, déduit de l'opérateur U, introduit au chapitre I, en remplaçant $\nu(|\vec{\xi}|)$ par $\nu(|\vec{\xi}|) + \lambda$, pourvu que $\nu(|\vec{\xi}|) + \lambda$ soit non nul, ce qui conviendra à notre étude. Les propriétés de U se généralisent à $R(\lambda, -\mathcal{M})$, pour $\nu(|\vec{\xi}|) + \lambda \neq o$

Lemme III.1.1

L'opérateur résolvant de $-\mathcal{M}$, $\mathcal{R}(\lambda, -\mathcal{M})$, est, pour $\lambda > -\nu(o)$, borné pour chaque $\vec{\xi}$, de $L^2(R)$ dans lui-même ; sa norme dans $L^2(R)$ est bornée par $(\nu(|\vec{\xi}|) + \lambda)^{-1}$.

Pour $\lambda > -\nu(o)$, $R(\lambda, -\mathcal{M})$ est borné dans $L^2(R,H)$ par $(\nu(o) + \lambda)^{-1}$.

Appliquons alors le théorème I que nous avons rappelé.

Lemme III.1.2

L'opérateur $-\mathcal{M}$ est générateur d'un semi groupe fortement continu dans $L^2(R,H)$, sa norme est majorée par $\exp[-\nu(o)t]$, pour $t > o$.

Reprenons maintenant le problème complet :

- $\mathcal{M} + A$ est à considérer comme perturbation de $-\mathcal{M}$, l'opérateur A est en effet borné dans $L^2(R,H)$. Le théorème 3 concernant les perturbations s'applique directement, soit :

Lemme III.1.3

L'opérateur $-\mathcal{M} + A$ est générateur d'un semi groupe $\mathcal{T}(t)$ fortement continu dans $L^2(R,H)$.

La borne que donnait la majoration de la résolvante manque ici d'intérêt : notons k la borne de A dans H, donc dans $L^2(R,H)$.

La résolvante de $(-\mathcal{M} + A)$ est bornée dans $L^2(R,H)$ par $\frac{1}{\lambda+\nu(o)-k}$, pour $\lambda + \nu(o) - k > o$, et le semi groupe admet alors $\exp(-\nu(o) + k)t$ comme borne dans $L^2(R,H)$.

Comme $k > \nu(o)$, cette majoration ne conduit pas à une décoissance de la norme pour t infini, et la suite de l'étude va consister à déterminer un comportement bien meilleur ; la proposition suivante sera utilisée au paragraphe 2 :

Proposition III.1.1

L'opérateur $-\mathcal{M} + A$ est générateur d'un semi groupe $\mathcal{C}(t)$ de contraction dans $L^2(R,H)$.

Prenons une valeur initiale $f_o(x, \vec{\xi})$ dans l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions régulières en x et $\vec{\xi}$, à support compact en x et $\vec{\xi}$. L'espace $\mathcal{D}$ étant dense dans $L^2(R,H)$, la majoration dans $L^2(R,H)$ pour $f_o(x, \vec{\xi})$ élément de $\mathcal{D}$ sera encore valable pour $f_o(x, \vec{\xi})$ dans $L^2(R,H)$.

En particulier $f_o(x, \vec{\xi})$ est aussi élément de $V(R,H)$, domaine de $\mathcal{M}$ dans $L^2(R,H)$, et :

$f(x, \vec{\xi}, t) = \mathcal{C}(t)\, f_o(x, \vec{\xi})$ satisfait au sens fort dans $L^2(R,H)$, d'après le théorème 2 que nous avons rappelé :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f - Af = o & t > o \ , \\ f\Big|_{t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) \ , \quad \text{soit :} \end{cases}$$

$$(3)\qquad ((\frac{\partial f}{\partial t}, f)) + ((\xi \frac{\partial f}{\partial x}, f)) + ((Lf, f)) = o \ , \quad t > o,$$

où $\quad L = \nu(|\vec{\xi}|) - A \ , \ \text{et}$

$$((\xi \frac{\partial f}{\partial x}, f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi \frac{\partial f}{\partial x}, f)_H \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} \Big[(\xi f, f)_H \Big]_{x=-A}^{x=+B}$$

En annexe, au théorème A.4 , nous avons établi que, si f_o est élément de $\mathcal{D}$, $(\xi \ \mathcal{C}(t) f_o \ , \ \mathcal{C}(t) \ f_o)_H$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini, soit $((\xi \frac{\partial f}{\partial x}, f)) = o$, pour t borné.

Rappelons la propriété fondamentale vérifiée par L dans H : écrivons la décomposition de $f(x, \vec{\xi}, t)$ dans H sur $\mathcal{P}H$ et $\mathcal{Q}H$:

$$f(x, \vec{\xi}, t) = \psi(x, \vec{\xi}, t) + \chi(x, \vec{\xi}, t).$$

Il existe alors une constante μ positive telle que :

$$(Lf, f)_H \leqslant - \mu \ ||\chi||_H^2 \ , \quad \text{soit :}$$

$$((Lf, f)) \leqslant - \mu \ |||\chi|||^2 \ .$$

Reportons cette majoration dans la relation (3) :

$$(4)\qquad ((\frac{\partial f}{\partial t}, f)) \leqslant - \mu \ |||\chi|||^2 \quad \text{pour tout } t \text{ borné.}$$

Il suffit alors de remarquer que :

$$((\frac{\partial f}{\partial t}, f)) = \frac{1}{2} \ \frac{d}{dt} \ |||f|||^2 \ , \ \text{pour en déduire :}$$

$$\frac{d}{dt} \ |||f|||^2 \leqslant o \ , \ \text{c'est-à-dire pour } t \text{ borné ,}$$

$\frac{d}{dt} \ ||| \ \mathcal{C}(t) \ f|||^2 \leqslant o$, et, en comparant avec $t = o$,

où $\quad \mathcal{C}(t) = I$:

$$(5)\qquad ||| \ \mathcal{C}(t) \ f_o||| \leqslant |||f_o|||, \ \text{ce qui établit bien la proposition selon laquelle } \mathcal{C}(t) \ \text{est de contradiction dans } L^2(R,H) \ \text{pour } t \ \text{borné. Utilisant } \mathcal{C}(t+\tau) = \mathcal{C}(t) \ \mathcal{C}(\tau) \ \text{la propriété est vraie pour tout } t.$$

Dans l'étape suivante, nous allons améliorer l'estimation et étudier la fonction $f(x, \vec{\xi},t)$ par l'intermédiaire de $\psi(x, \vec{\xi},t)$ et $\chi(x, \vec{\xi}, t)$ dans l'espace $\mathcal{X}$ des fonctions de $L^2(R,H)$, dont la norme dans $L^2(R,H)$ est de carré intégrable en t sur (o, ∞) : le produit scalaire et la norme sont définis par :

$$[\phi, \theta]_{\mathcal{X}} = \int_o^\infty ((\phi, \theta)) \, dt ,$$

$$\|\phi\|_{\mathcal{X}}^2 = [\phi, \phi] .$$

2 . Etude de $\mathcal{C}(t)\, f_o$ dans $\mathcal{X}$

L'inégalité qui conduisant à la proposition précédente :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |||f|||^2 \leq - \mu |||\chi|||^2 ,$$

peut être exploitée de la manière suivante :

Intégrons les deux membres entre 0 et t :

$$\mu \int_o^t |||\chi(\tau)|||^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_o^t \frac{d}{d\tau} |||f(\tau)|||^2 \, d\tau$$

soit :

$$\mu \int_o^t |||\chi(\tau)|||^2 d\tau \leq - \frac{1}{2} \, | \, |||f(\tau)|||^2 |_{\tau=o}^{\tau=t}$$

$$\leq \frac{1}{2} (|||f(o)|||^2 - |||f(t)|||^2).$$

Le semi groupe $\mathcal{C}(t)$ étant de contraction, d'après III.1.1 :

(6) $\int_o^t |||\chi(\tau)|||^2 \, d\tau \leq \frac{1}{2\mu} |||f(o)|||^2$, pour toute valeur positive de t.

Cette majoration reste valable pour $f_o(x, \vec{\xi})$ élément de $L^2(R,H)$, puisque l'espace $V(R,H)$ est dense dans $L^2(R,H)$, soit :

Lemme III.2.1

La projection $\chi(x, \vec{\xi}, \cdot)$ de $\mathcal{C}(t) f_o(x, \vec{\xi})$ sur l'espace $L^2(R,H)$ appartient à l'espace $\mathcal{X}$, et sa norme est bornée par $\frac{1}{\sqrt{2\mu}} |||f_o|||$.

Utilisons ce résultat, et la décomposition de L sous la forme $L = \nu(|\vec{\xi}|) - A$, pour obtenir une nouvelle majoration :

$$((Lf, f)) = ((L\chi, \chi))$$

$$= ((\nu(|\vec{\xi}|)\chi, \chi)) - ((A\chi, \chi)).$$

$|((A\chi, \chi))| \leq k\, |||\chi|||^2$, et $((A\chi, \chi))$ est intégrable en t,

$$\int_o^t |((A\chi, \chi))|\, d\tau \leq k \frac{1}{2\mu} |||f_o|||^2.$$

Intégrons la relation suivante entre les instants 0 et t :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |||f|||^2 + ((\nu(|\vec{\xi}|\chi, \chi)) - ((A\chi, \chi)) = o\ ,$$

$$\int_o^t |||\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2}\, \chi(x, \vec{\xi}, \tau)|||^2\, d\tau \leq k \frac{1}{2\mu} |||f_o|||^2 - \frac{1}{2} \int_o^t \frac{d}{d\tau} |||f(x,\vec{\xi},\tau)\, d\tau$$

$$\int_o^t |||\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2}\, \chi(x, \vec{\xi}, \tau)|||^2\, d\tau \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{k}{\mu}) |||f_o|||^2. \tag{7}$$

Cette majoration reste vraie, comme précédemment, pour tout élément f_o de $L^2(R,H)$, ce qui nous permet d'énoncer :

Proposition III.2.1

$\mathcal{C}(t)$ étant le semi groupe engendré par $-\mathcal{M} + A$ dans $L^2(R,H)$, les opérateurs $Q\mathcal{C}(t)$ et $\nu(\vec{\xi})^{1/2}\ Q\,\mathcal{C}(t)$ sont bornés de $L^2(R,H)$ dans $\mathcal{X}$, par $\frac{1}{\sqrt{2\mu}}$ et $\left[\frac{1}{2}(1 + \frac{k}{\mu})\right]^{1/2}$, où Q est l'opérateur de projection défini au chapitre I.

Afin d'étudier l'équation $\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathcal{M} - A) f = o$ dans $\mathcal{X}$, nous allons étudier dans cet espace chaque élément, et nous procèderons de manière analogue à la démonstration précédente pour établir :

Proposition III.2.2

Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}\ Q\mathcal{C}(t)$ et $\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t}\ Q\,\mathcal{C}(t)$ sont bornés de $V(R,H)$ dans l'espace $\mathcal{X}$.

Prenons d'abord une fonction initiale $f_o(x, \vec{\xi})$ telle que $\mathcal{M} f_o$ soit élément de $V(R,H)$ (f_o appartient alors au domaine de $\mathcal{M}^2$ dans $L^2(R,H)$).

La théorie des semi groupes rappelée au théorème 2 montre que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -(\mathcal{M} - A)\ \mathcal{C}(t)\ f_o$$

$$= -\mathcal{C}(t)\ (\mathcal{M} - A)\ f_o, \text{ ceci pour } f_o \text{ élément de}$$

$V(R,H)$ et le fait que $\mathcal{C}(t)$ soit un opérateur de contraction dans $L^2(R,H)$ montre tout d'abord que :

$$|||\frac{\partial f}{\partial t}||| \leq |||(\mathcal{M} - A)\ f_o|||.$$

L'hypothèse supplémentaire faite sur f_o permet de dériver par rapport au temps la relation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathcal{M} - A)\ f = o, \qquad t > o$$

et d'obtenir dans $L^2(R,H)$ l'équation :

$$(2') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + (\mathcal{M} - A)\ \frac{\partial f}{\partial t} = o \quad t>o, \text{ et pour la valeur} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t = o : \\ \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=o} = -(\mathcal{M} - A)\ f_o, \end{cases}$$

en effet, $(\mathcal{M} - A)f_o$ appartenant à $V(R,H)$, le théorème 2 permet ce calcul dans $L^2(R,H)$.

Nous sommes alors ramenés au problème précédent, où f est remplacé par $\frac{\partial f}{\partial t}$, et f_o par $(-\mathcal{M} + A)f_o$, et nous concluons :

$$(6') \quad \int_o^t |||Q \frac{\partial}{\partial t} f(x,\vec{\xi},\tau)|||^2 d\tau \leq \frac{1}{2\mu}|||(\mathcal{M} - A)\ f_o|||^2, \text{ puis}$$

$$(7') \quad \int_o^t |||\nu(|\vec{\xi}|)^{1/2}\ Q\ \frac{\partial}{\partial t} f(x,\vec{\xi},\tau)|||^2\ d\tau \leq \frac{1}{2}(1+\frac{k}{\mu})|||(\mathcal{M} - A)f_o|||^2.$$

Le domaine de $\mathcal{M}$ étant dense dans $L^2(R,H)$, ces majorations subsistent pour f_o élément de $V(R,H)$. Elles ont lieu pour tout t, ce qui établit la proposition III.2.2.

Dans la suite de l'étude, nous garderons comme hypothèse sur $f_o(x, \vec{\xi})$ cette dernière condition :

$f_o(x, \vec{\xi})$ appartient à $V(R,H)$

Sous cette hypothèse, l'élément de $L^2(R,H)$ défini par $f(x, \vec{\xi}, t) = \mathcal{C}(t)\, f_o(x, \vec{\xi})$ vérifie dans $\mathcal{X}$ la relation :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(\vec{\xi})\, \chi\right) + \frac{\partial \chi}{\partial t} - A\chi = o \qquad t > o. \\ f\big|_{t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) \end{cases}$$

Compte tenu des propriétés de χ déjà obtenues, nous allons étudier plus précisément $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Rappelons les notations du chapitre I :

$V'(R,H)$ est le dual de $V(R,H)$

$\mathcal{H}^1(R)$ est l'espace des fonctions de $L^2(R)$ dont la dérivée est aussi élément de $L^2(R)$.

Introduisons l'espace des éléments de $V(R,H)$ dont la norme dans $V(R,H)$ est de carré intégrable pour la variable t. Soit $\mathcal{Y}$ cet espace.

L'expression $\left\{\int_o^\infty |||\mathcal{M} f(t)|||^2\, dt\right\}^{1/2}$ est alors la norme dans $\mathcal{Y}$, et $\mathcal{Y}$ n'est autre que le domaine de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{X}$.

Nous pouvons définir son dual $\mathcal{Y}'$ à partir du dual $V'(R,H)$ de $V(R,H)$: la norme dans $\mathcal{Y}'$ est définie à partir de la norme de V' par

$$\|F\|_{\mathcal{Y}'} = \left\{\int_o^\infty |f|_{V'}^2\, dt\right\}^{1/2}.$$

Lemme III.2.2

> Si la valeur initiale $f_o(x, \vec{\xi})$ appartient au domaine de $\mathcal{M}$ dans $L^2(R,H)$, soit $V(R,H)$, alors l'élément $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$ appartient pour tout t positif à l'espace $V'(R,H)$, et $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$ est élément de $\mathcal{Y}'$.

Le fait que χ soit élément de $L^2(R,H)$ a les conséquences suivantes :

$A\chi$ est dans $L^2(R,H)$,

$\mathcal{M}\chi$ est élément de $V'(R,H)$.

D'autre part, dès que $f_o(x, \vec{\xi})$ est élément de $V(R,H)$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ appartient à $L^2(R,H)$, ainsi que $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ (par projection sur $\mathcal{Q}\ L^2(R,H)$).

Il en résulte que :

$-\ \mathcal{M}\chi + A\chi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ appartient pour tout t positif à $V'(R,H)$, et $f(t) = \mathcal{C}(t)\ f_o$ étant solution pour $t > o$ de :

$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathcal{M} - A)\ f = o$ dans $L^2(R,H)$, nous en déduisons que , pour tout $t > o$, nous avons dans $V'(R,H)$:

$$(8) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\ \mathcal{M}\chi + A\chi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\ .$$

Notons toujours par $<,\ >_V$ la dualité entre $V(R,H)$ et $V'(R,H)$, et étudions la norme de $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$ dans $V'(R,H)$, ceci en prenant un élément $\phi(x, \vec{\xi})$ quelconque de $V(R,H)$:

$$(9) \qquad < \frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x},\ \phi(x, \vec{\xi}) >_V = < -\ \mathcal{M}\chi,\ \phi>_V + <A\chi,\ \phi>_V - < \frac{\partial \chi}{\partial t},\ \phi >_V$$

$$= -((\chi,\ \mathcal{M}^*\ \phi)) + ((A\chi,\ \phi)) - ((\frac{\partial \chi}{\partial t},\ \phi))$$

$$|< \frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x},\ \phi >_V| \ \leq\ |||\chi|||\ |\phi|_V + k\ |||\chi|||\ |||\phi||| + |||\frac{\partial \chi}{\partial t}|||\ |||\phi|||$$

$$< \frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x},\ \phi >_V \qquad \leq\ |\phi|_V\ \{C_1\ |||\chi||| + C_2\ |||\frac{\partial \chi}{\partial t}|||\ \}$$

$|||\chi|||$ et $|||\frac{\partial \chi}{\partial t}|||$ sont, comme il a été établi, de carré intégrable en t sur (o, ∞), pourvu que f_o appartienne à $V(R,H)$:

$|\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}|_V$, est de ce fait, de carré intégrable en t sur (o, ∞), et sa norme dans $\mathcal{Y}'$ est bornée par une expression de la forme $C_3|||f_o||| + C_4|f_o|_V$.

Reprenons la décomposition de $f(x, \vec{\xi}, t)$ sur $\mathcal{P}H$ et $\mathcal{Q}H$:

$$f(x, \vec{\xi}, t) = \psi(x, \vec{\xi}, t) + \chi(x, \vec{\xi}, t), \quad \text{où}$$

$$\psi(x, \vec{\xi}, t) = \sum_{\beta=o}^{\beta=4} a_\beta(x, t)\ \psi_\beta(\vec{\xi})$$

Nous allons déduire des propriétés de $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$ des précisions concernant $\frac{\partial a_i}{\partial t}$ et $\frac{\partial a_i}{\partial x}$:

Proposition III.2.3

Si $f_o(x, \vec{\xi})$ appartient à $V(R,H)$, chacun des éléments suivants appartient à l'espace $\mathcal{Y}'$:

$$\psi_i(\vec{\xi}) \frac{\partial a_i}{\partial t}, \quad i \neq 1 \; ; \; \psi_j(\vec{\xi}) \frac{\partial a_j}{\partial x}, \; j \neq o, \quad \text{et} \quad \psi_1(\vec{\xi}) \frac{\partial a_1}{\partial t} + \xi \, \psi_o(\vec{\xi}) \frac{\partial a_o}{\partial x} \cdot$$

Pour des raisons de normalisation, les vecteurs $\psi_\beta(\vec{\xi})$ de base de l'espace $\mathcal{P}H$ sont pris sous la forme :

$$\psi_o(\vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi})$$

$$\psi_1(\vec{\xi}) = \xi \, \omega^{1/2}(\vec{\xi})$$

$$\psi_2(\vec{\xi}) = \eta \, \omega^{1/2}(\vec{\xi})$$

$$\psi_3(\vec{\xi}) = \mathcal{S} \, \omega^{1/2}(\vec{\xi})$$

$$\psi_4(\vec{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{6}} (|\vec{\xi}|^2 - 3) \, \omega^{1/2}(\vec{\xi})$$

où $\omega(\vec{\xi})$ est le maxwellien en variables sans dimensions soit :

$$\omega(\vec{\xi}) = \exp\left\{- \frac{|\vec{\xi}|^2}{2}\right\}$$

L'expression $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$ s'écrit formellement :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x} = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \left\{ \frac{\partial a_o}{\partial t} + \xi\left(\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_o}{\partial x}\right) + \eta \frac{\partial a_2}{\partial t} + \mathcal{S} \frac{\partial a_3}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial a_1}{\partial x} + \xi\eta \frac{\partial a_2}{\partial x} + \xi \mathcal{S} \frac{\partial a_3}{\partial x} + \frac{|\vec{\xi}|^2 - 3}{\sqrt{6}} \frac{\partial a_4}{\partial t} + \xi \frac{|\vec{\xi}|^2 - 3}{\sqrt{6}} \frac{\partial a_4}{\partial x} \right\}$$

Reprenons alors la relation (9) , dans laquelle nous allons choisir des éléments $\phi(x, \vec{\xi})$ particuliers de $V(R,H)$ successivement :

$$\phi_o(x, \vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \times b(x) = b(x) \, \theta_o(\vec{\xi})$$

$$\phi_1(x, \vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \, . \, \xi \, . \times b(x) = b(x) \, \theta_1(\vec{\xi})$$

$$\phi_2(x, \vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \, . \, \eta \, . \times b(x) = b(x) \, \theta_2(\vec{\xi})$$

$$\phi_3(x, \vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \, . \, \mathcal{S} \, . \times b(x) = b(x) \, \theta_3(\vec{\xi})$$

$$\phi_4(x, \vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \, \frac{1}{\sqrt{6}}(|\vec{\xi}|^2 - 3) \times b(x) = b(x) \, \theta_4(\vec{\xi})$$

$$\phi_5(x, \vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \, \xi^2 \times b(x) = b(x) \, \theta_5(\vec{\xi})$$

$$\phi_6(x, \xi) = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \, \xi\eta \times b(x) = b(x) \, \theta_6(\vec{\xi})$$

$$\phi_7(x, \vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \, \xi \mathcal{S} \times b(x) = b(x) \, \theta_7(\vec{\xi})$$

$$\phi_8(x, \vec{\xi}) = \omega^{1/2}(\vec{\xi}) \, \frac{1}{\sqrt{6}} \, \xi(|\vec{\xi}|^2 - 3) \times b(x) = b(x) \, \theta_8(\vec{\xi})$$

où $b(x)$ est un élément de $\mathcal{H}^1(R)$.

Nous obtiendrons ainsi 9 majorations, où les seconds membres seront de carré intégrable en t sur (o, ∞) : il sera inutile de les calculer, seule importe cette propriété. De même les expressions (E_i) obtenues aux premiers membres seront de carré intégrable en t sur (o, ∞) pour tout $b(x)$ de $\mathcal{H}^1(R)$, soit en notant :

$\delta_{ij} = (\theta_i(\vec{\xi}), \theta_j(\vec{\xi}))_H$, i et j variant de o à 8 :

$$E_o = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, b(x) \{\delta_{oo} \frac{\partial a_o}{\partial t} + \delta_{o1}(\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_o}{\partial x}) + \delta_{o2} \frac{\partial a_2}{\partial t} + \delta_{o3} \frac{\partial a_3}{\partial t} + \delta_{o4} \frac{\partial a_4}{\partial t}$$
$$+ \delta_{o5} \frac{\partial a_1}{\partial x} + \delta_{o6} \frac{\partial a_2}{\partial x} + \delta_{o7} \frac{\partial a_3}{\partial x} + \delta_{o8} \frac{\partial a_4}{\partial x} \}$$

$$E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, b(x) \{\delta_{10} \frac{\partial a_o}{\partial t} + \delta_{11}(\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_o}{\partial x}) + \delta_{12} \frac{\partial a_2}{\partial t} + \delta_{13} \frac{\partial a_3}{\partial t} + \delta_{14} \frac{\partial a_4}{\partial t}$$
$$+ \delta_{15} \frac{\partial a_1}{\partial x} + \delta_{16} \frac{\partial a_2}{\partial x} + \delta_{17} \frac{\partial a_3}{\partial x} + \delta_{18} \frac{\partial a_4}{\partial x}\} \quad , \ldots\ldots$$

et de manière générale, pour i variant de o à 8

$$E_i = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, b(x) \{\delta_{io} \frac{\partial a_o}{\partial t} + \delta_{i1}(\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_o}{\partial x}) + \delta_{i2} \frac{\partial a_2}{\partial t} + \delta_{i3} \frac{\partial a_3}{\partial t} + \delta_{i4} \frac{\partial a_4}{\partial t}$$
$$+ \delta_{i5} \frac{\partial a_1}{\partial x} + \delta_{i6} \frac{\partial a_2}{\partial x} + \delta_{i7} \frac{\partial a_3}{\partial x} + \delta_{i8} \frac{\partial a_4}{\partial x}\}$$

Le déterminant des (δ_{ij}) étant non nul, comme il est montré dans l'annexe B II, on en déduit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \frac{\partial a_o}{\partial t} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} b(x)(\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_o}{\partial x})dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \frac{\partial a_2}{\partial t} dx ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \frac{\partial a_3}{\partial t} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \frac{\partial a_4}{\partial t} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \frac{\partial a_1}{\partial x}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \frac{\partial a_2}{\partial x} dx ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \frac{\partial a_3}{\partial x} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \frac{\partial a_4}{\partial x} dx$$

sont de carré intégrable en t sur (o, ∞) dès que $b(x)$ est élément de $\mathcal{H}^1(R)$, ce qui peut aussi s'énoncer sous la forme suivante : $\frac{\partial a_i}{\partial t}$ $i \neq 1$, $\frac{\partial a_j}{\partial x}$, $j \neq o$, et $\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_o}{\partial x}$ sont des éléments de $\mathcal{H}^{-1}(R)$ dont la norme dans $\mathcal{H}^{-1}(R)$ est de carré intégrable en t sur (o, ∞).

Ce résultat va pouvoir être utilisé pour établir une autre propriété concernant $\chi(x, \vec{\xi}, t)$:

Proposition III.2.4

> Si $f_o(x, \vec{\xi})$ est élément de $V(R, H)$, $\nu(|\vec{\xi}|)\chi$ appartient à l'espace $\mathcal{X}$.

Au chapitre I, il a été établi que l'opérateur U appliquait $V'(R,H)$ dans $L^2(R,H)$, et vérifiait dans $L^2(R,H)$:

$U\ \mathcal{M} = I$.

Les opérateurs $\nu(\vec{\xi})U$ et $\xi \frac{\partial}{\partial x} U$ appliquent de plus $L^2(R,H)$ dans luis-même.

Il est immédiat d'en déduire que :

a) U applique $\mathcal{Y}'$ dans $\mathcal{X}$,

b) $U\ \mathcal{M} = I$ dans $\mathcal{X}$,

c) $\nu(|\vec{\xi}|)U$ et $\xi \frac{\partial}{\partial x} U$ appliquent $\mathcal{X}$ dans lui-même.

L'équation suivante :

$(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}) + \frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathcal{M}\ \chi - A\chi = o$ a chacun de ses termes dans l'espace $\mathcal{Y}'$. Nous en déduisons que dans $\mathcal{X}$, nous avons la relation, où chacun des termes appartient à $\mathcal{X}$:

$$U\ (\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi\ \frac{\partial \psi}{\partial x}) + U\ \frac{\partial \chi}{\partial t} + \chi - U\ A\ \chi\ =\ o$$

$\frac{\partial \chi}{\partial t}$ et $A\chi$ sont des éléments de $\mathcal{X}$, et de ce fait, $\nu(\vec{\xi})U(\frac{\partial \chi}{\partial t} - A\chi)$ appartient aussi à $\mathcal{X}$.

Etudions maintenant le terme $U(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi\ \frac{\partial \psi}{\partial x})$: d'après la proposition III.2.3, on peut le décomposer en termes de $\mathcal{X}$:

$$U(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi\ \frac{\partial \psi}{\partial x}) = \sum_{i \neq 1} U(\psi_i(\vec{\xi})\ \frac{\partial a_i}{\partial t}) + \sum_{i \neq o} U(\psi_i(\vec{\xi})\ \xi \frac{\partial a_i}{\partial x}) + U(\psi_1(\vec{\xi}) \frac{\partial a_1}{\partial t} + \psi_o\ \xi\ \frac{\partial a_o}{\partial x})$$

Le fait que $\frac{\partial a_i}{\partial t}$, $i \neq 1$, $\frac{\partial a_i}{\partial x}$ $i \neq o$, et $\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_o}{\partial x}$, appartiennent à l'espace $\mathcal{H}^{-1}(R)$, et sont dans cet espace de norme de carré intégrable en t

sur (o, ∞), joint au comportement en $\exp \frac{-|\vec{\xi}|^2}{2}$ de $\psi_i(\vec{\xi})$, permet de conclure que :

$$\nu(\vec{\xi})\ U\ (\frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}) \quad \text{est aussi élément de } \mathcal{X}.$$

Nous en déduisons que $\nu(\vec{\xi})\ \chi\ (x, \vec{\xi})$ est élément de $\mathcal{X}$.

Résumons les résultats obtenus dans le théorème suivant :

Théorème III.3.1

L'opérateur $-\mathcal{M} + A$ engendre dans $L^2(R,H)$ un semi groupe de contraction $\mathcal{C}(t)$, tel que l'élément f de $L^2(R,H)$ défini par :

$f(x, \vec{\xi}, t) = \mathcal{C}(t)\ f_o(x, \vec{\xi})$, possède les propriétés suivantes :

I - Si f_o est élément de $L^2(R,H)$

1) $f(x, \vec{\xi}, t)$ est l'unique solution dans $L^2(R,H)$ de :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathcal{M} - A)\ f = o & t > o \\ f\big|_{t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) \end{cases}$$

2) $Q\ f(x, \vec{\xi}, t)$ est élément de $\mathcal{X}$.

II - Si $f_o(x, \vec{\xi})$ est, de plus, élément de $V(R,H)$, domaine de $\mathcal{M}$ dans $L^2(R,H)$,

$f(x, \vec{\xi}, t)$ possède aussi les propriétés :

1) $\frac{\partial f}{\partial t}$ appartient à $L^2(R,H)$, et $Q \frac{\partial f}{\partial t}$ est élément de $\mathcal{X}$

2) $\psi_i(\vec{\xi}) \frac{\partial a_i}{\partial t}$ $i \neq 1$, $\psi_i(\vec{\xi})\ \xi \frac{\partial a_i}{\partial x}$ $i \neq o$,

$\psi_1(\vec{\xi}) \frac{\partial a_1}{\partial t} + \psi_o(\vec{\xi})\ \xi \frac{\partial a_o}{\partial x}$ appartiennent à $\mathcal{Y}'$.

3) f est solution forte de :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f - Af = o\ , & t > o \quad \text{dans } L^2(R,H) \\ f\big|_{t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) \end{cases}$$

4) Dans $\mathcal{Y}'$ on a :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \sum'_{i \neq 1} \frac{\partial a_i}{\partial t} \psi_i(\vec{\xi}) + \sum_{i \neq o} \frac{\partial a_i}{\partial x} \xi \psi_i(\vec{\xi}) + \frac{\partial a_1}{\partial t} \psi_1(\vec{\xi}) + \frac{\partial a_o}{\partial x} \xi \psi_o(\vec{\xi}) + \mathcal{M} \chi - A\chi = o$$

5) $\nu(\vec{\xi})\ \chi\ (x, \vec{\xi})$ est élément de $\mathcal{X}$.

3 - Problème non homogène

Considérons maintenant le problème non homogène, à valeur initiale non nulle :

$$(10) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f - A f = g & , \ t > o \\ f\big|_{t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) \end{cases}$$

On suppose que le second membre $g(x, \vec{\xi}, t)$ vérifie les conditions suivantes :

1) Pour tout t positif, $g(x, \vec{\xi}, t)$ appartient à $\mathcal{Q}\, L^2(R, H)$

2) Sa norme dans $L^2(R, H)$ est intégrable en t sur (o, ∞).

Ces deux hypothèses sont justifiées par le fait que le second membre de l'équation de Boltzmann complète appartient à $\mathcal{Q}\, L^2(R, H)$ et, étant quadratique en $f(x, \vec{\xi}, t)$, il est intégrable en t dès que $f(x, \vec{\xi}, t)$ est de carré intégrable.

Nous étudierons le système (10) par superposition du problème homogène à valeur initiale non nulle (3) , et de

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f - Af = g & t > o \\ f\big|_{t=o} = o \ , \end{cases}$$

dont la résolution formelle est réalisée par l'intégrale de Duhamel :

$$f(x, \vec{\xi}, t) = \int_o^t \mathcal{C}(t - \tau)\ g(x, \vec{\xi}, \tau)\ d\tau \ ;$$

Cette expression formelle signifie ici que pour tout élément $\phi(x, \vec{\xi})$ de $L^2(R, H)$:

$$(12) \qquad ((f(x, \vec{\xi}, t) , \phi(x, \vec{\xi}))) = \int_o^t ((\mathcal{C}(t-\tau)\ g(x, \vec{\xi}, \tau), \phi(x, \vec{\xi})))\ d\tau .$$

Afin de montrer que l'élément $f(x, \vec{\xi}, t)$ de $L^2(R,H)$, ainsi défini pour tout t , appartient à $\mathcal{X}$, il suffit de montrer que l'expression $((f(x, \vec{\xi}, t) , \phi(x, \vec{\xi})))$ est de carré intégrable en t sur (o, ∞) , pour tout $\phi(x, \vec{\xi})$ de $L^2(R,H)$.

Dans ce but , nous allons étudier l'adjoint de $\mathcal{C}(t)$ dans $L^2(R,H)$, et nous pourrons alors tirer partie du fait que $g(x, \vec{\xi}, t)$ appartient à $Q\ L^2(R, H)$, compte tenu des résultats des paragraphes 1 et 2 .

L'adjoint $\mathcal{C}^*(t)$ de $\mathcal{C}(t)$ dans $L^2(R, H)$ est le semi-groupe résolvant le problème adjoint de (2) dans $L^2(R, H)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M}^* f - A f = o & t > o \\ f\,|_{t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) . \end{cases}$$

En effet , la résolvante de $-\mathcal{M}^* + A$ est l'opérateur adjoint de $R(\lambda, -\mathcal{M} + A)$ dans $L^2(R, H)$, et l'expression intégrale du sémi-groupe engendré par $-\mathcal{M}^* + A$ montre que : l'opérateur $\mathcal{C}^*(t)$ adjoint de $\mathcal{C}(t)$ dans $L^2(R, H)$ est bien le semi-groupe engendré par $-\mathcal{M}^* + A$.

Les démonstrations faites aux paragraphes 1 et 2 pour $\mathcal{C}(t)$ restent valables pour $\mathcal{C}^*(t)$, et nous pouvons conclure :

Lemme III . 3 . 1

Si $\phi(x, \vec{\xi})$ appartient à $L^2(R, H)$, $Q\mathcal{C}^*(t)\ \phi(x, \vec{\xi})$ est élément de l'expace $\mathcal{X}$, et sa norme dans $\mathcal{X}$ est bornée par $\frac{1}{\sqrt{2\mu}}\ |||\phi(x, \vec{\xi})|||$.

Nous pouvons mettre $((\mathcal{C}(t-\tau)\, g(x,\vec{\xi},\tau), \phi(x,\vec{\xi}))$ sous la forme :

$$((\mathcal{C}(t-\tau)\, g(x,\vec{\xi},\tau), \phi(x,\vec{\xi})) = ((g(x,\vec{\xi},\tau), \mathcal{C}^*(t-\tau)\, \phi(x,\vec{\xi}))$$
$$= ((g(x,\vec{\xi},\tau), Q\,\mathcal{C}^*(t-\tau)\, \phi(x,\vec{\xi})),$$

puisque $g(x,\vec{\xi},\tau)$ est dans $Q\,L^2(R,H)$.

La relation (12) va pouvoir être remplacée par la majoration où nous reconnaitrons un produit de convolution :

$$((f(x,\vec{\xi},t), \phi(x,\vec{\xi})) = \int_0^t ((g(x,\vec{\xi},\tau), Q\mathcal{C}^*(t-\tau)\, \phi(x,\vec{\xi}))\, d\tau$$

$$(13)\quad \left|((f(x,\vec{\xi},t), \phi(x,\vec{\xi}))\right| \leq \int_0^t |||g(x,\vec{\xi},\tau)|||\; |||Q\,\mathcal{C}^*(t-\tau)\, \phi(x,\vec{\xi})|||\, d\tau,$$

et nous allons le majorer en fonction de la norme de $|||g(x,\vec{\xi},t)|||$ dans $L^1(o,\infty)$ et de la norme de $|||Q\,\mathcal{C}^*(t)\, \phi(x,\vec{\xi})|||$ dans $L^2(o,\infty)$, c'est à dire de $Q\,\mathcal{C}^*(t)\, \phi(x,\vec{\xi})$ dans $\mathcal{X}$, ceci d'après la relation suivante vérifiée par le produit de convolution :

$$||h * k||_{L^2} \leq ||h||_{L^1}\, ||k||_{L^2}\ , \text{ soit}$$

$$\{\int_0^\infty ((f(x,\vec{\xi},t), \phi(x,\vec{\xi}))^2 dt\}^{1/2} \leq \int_0^\infty |||g(x,\vec{\xi},t)|||\, dt \times$$
$$\{\int_0^\infty |||Q\,\mathcal{C}^*(t)\, \phi(x,\vec{\xi})|||^2\, dt\}^{1/2}$$

Le lemme III.3.1 montre alors que :

$$\{\int_0^\infty ((f(x,\vec{\xi},t), \phi(x,\vec{\xi}))^2\, dt\}^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_0^\infty |||g(x,\vec{\xi},t)|||\, dt\ .\ |||\phi(x,\vec{\xi})|||,$$

c'est à dire :

$$[\![f(x,\vec{\xi},t)]\!]_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_0^\infty |||g(x,\vec{\xi},t)|||\, dt,$$

$f(x,\vec{\xi},t)$ étant une forme linéaire continue sur $L^2(R,H)$, de carré intégrable en t sur (o,∞). Nous énoncerons le théorème suivant :

Théorème III.3.1

Le problème non homogène à valeur initiale nulle :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f - A f = g & t > o \\ f\big|_{t=o} = o \end{cases}$$

admet une solution unique dans $L^2(R,H)$, si $g(x,\vec{\xi},t)$ est dans $L^2(R,H)$:

$$f(x,\vec{\xi},t) = \int_o^t \mathcal{C}(t-\tau)\, g(x,\vec{\xi},\tau)\, d\tau \ .$$

Si $g(x,\vec{\xi},t)$ appartient à $\mathcal{Q} L^2(R,H)$, et si $|||g(x,\vec{\xi},t)|||$ est intégrable sur (o,∞), l'élément $f(x,\vec{\xi},t)$ de $L^2(R,H)$ ainsi défini appartient à $\mathcal{X}$.

Remarquons que, sous ces hypothèses concernant $g(x,\vec{\xi},t)$, $|||f(x,\vec{\xi},t)|||$ n'admet pas de majoration uniforme en t, comme c'était le cas pour le problème homogène.

Si par contre nous supposons qu'en outre $g(x,\vec{\xi},t)$ est élément de $\mathcal{X}$, nous pouvons conclure à cette borne uniforme en t pour $|||f(x,\vec{\xi},t)|||$: il suffit de reprendre l'inégalité (13), et de lui appliquer maintenant la majoration :

$$|h * k|_{L^\infty} \leq ||h||_{L^2} \, ||k||_{L^2} \ , \quad \text{soit :}$$

$$\operatorname*{Max}_t \left| ((f(x,\vec{\xi},t),\, \phi(x,\vec{\xi})) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \, [\![g]\!]_{\mathcal{X}} \, |||\phi|||,$$

c'est à dire

$$|||f(x,\vec{\xi},t)||| \leq \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \, [\![g]\!]_{\mathcal{X}}$$

Etudions les propriétés intéressantes conséquences de cette hypothèse sur g :

Proposition III.3.1

Si $g(x,\vec{\xi},t)$ vérifie les hypothèses du théorème III.3.1, et si de plus $g(x,\vec{\xi},t)$ est dans $\mathcal{X}$,

$f(x,\vec{\xi},t) = \int_o^t \mathcal{C}(t-\tau)\, g(x,\vec{\xi},\tau)\, d\tau$ est tel que :

$\frac{\partial f}{\partial t}$, $\mathcal{M}f$ sont éléments de $\mathcal{Y}'$, et que :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathcal{M} - A)f = g \quad \text{dans } \mathcal{Y}'$$

L'expression intégrale de $f(x,\vec{\xi},t)$ et les propriétés de $\mathcal{C}(t)$ montrent que :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g(x\vec{\xi},t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\ \mathcal{C}(t-\tau)\ g(\tau)\ d\tau$$

$$= g(x,\vec{\xi},t) + \int_0^t -(\mathcal{M}-A)\ \mathcal{C}(t-\tau)\ g(\tau)\ d\tau ,$$

c'est à dire pour tout élément $\phi(x,\vec{\xi})$ de $L^2(R,H)$:

$$((\frac{\partial f}{\partial t}\ ,\ \phi)) = ((g,\ \phi)) + \int_0^t ((\frac{\partial}{\partial t}\ \mathcal{C}(t-\tau)\ g(x,\vec{\xi},\tau),\ \phi(x,\vec{\xi}))\ d\tau$$

$$= ((g,\ \phi)) + \int_0^t ((g(\tau),\ Q\frac{\partial}{\partial t}\ \mathcal{C}^*(t-\tau)\ \phi))\ d\tau$$

Les propriétés de $\mathcal{C}^*(t)$ déduites de celles de $\mathcal{C}(t)$ montrent en particulier que $Q\frac{\partial}{\partial t}\ \mathcal{C}^*(t)\ \phi(x,\vec{\xi})$ est élément de $\mathcal{X}$, dès que $\phi(x,\vec{\xi})$ est élément de $V(R,H)$.

Pour tout élément $\phi(x,\vec{\xi})$ de $V(R,H)$ nous avons alors :

$$\left\{\int_0^\infty ((\frac{\partial f}{\partial t}\ ,\ \phi))^2 dt\right\}^{1/2} \leq \left\{\int_0^\infty |||g|||^2 |||\phi|||^2 dt\right\}^{1/2} + \left|\left|\left| |||g(x,\vec{\xi},t)||| * |||Q\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{C}^*(t)\phi(x,\vec{\xi}|||\right|\right|\right|_{L^2(0,\infty)}$$

Soit, en appliquant la même inégalité que pour démontrer le théorème III.3.1 :

$$\left\{\int_0^\infty ((\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi,t),\phi(x,\vec{\xi}))^2 dt\right\}^{1/2} \leq |||\phi||| \left\{\int_0^\infty |||g|||^2 dt\right\}^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2\mu}} |||(\mathcal{M}-A)\phi||| \times \int_0^\infty |||g|||dt .$$

$$\leq |||\phi|||\ [\![g]\!]_{\mathcal{X}} + \frac{1}{2\mu}(|\phi|_V + k|||\phi|||)\int_0^\infty |||g|||dt$$

Nous pouvons dire alors que $\frac{\partial f}{\partial t}$ est une forme linéaire continue sur $V(R,H)$, de carré intégrable sur (o, ∞) en t, c'est à dire , $\frac{\partial f}{\partial t}$ appartient à $\mathcal{Y}'$, et sa norme dans $\mathcal{Y}'$ est bornée par $C_1 \, [\![g]\!]_X + C_2 \int_o^\infty |||g|||dt$.

Le problème non homogène à valeur initiale non nulle

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f - Af = g & t > o \\ f\big|_{t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) \end{cases}$$

a pour solution :

$$f(x,\vec{\xi},t) = \mathcal{C}(t)\, f_o(x,\vec{\xi}) + \int_o^t \mathcal{C}(t-\tau)\, g(x,\vec{\xi},\tau)\, d\tau \ .$$

Les propriétés de cette solution se déduisent d'une part du paragraphe 2, suivant les hypothèses faites sur $f_o(x,\vec{\xi})$ et d'autre part du paragraphe 3, suivant les hypothèses faites sur $g(x,\vec{\xi},t)$.

PROBLEME LINEAIRE, NON STATIONNAIRE, SUR LA DROITE DANS LES ESPACES $\mathcal{B}_r$.

Notre but est de résoudre, au chapitre suivant, le problème de l'existence de la solution de l'équation de Boltzmann sur la droite, non stationnaire, avec une valeur initiale donnée, dans le cas où le second membre est le noyau quadratique $J(f,f)$, ceci sur un intervalle de temps fini.

Pour traiter ce problème, il nous faudra employer les espaces introduits par Grad, pour pouvoir obtenir une majoration du terme quadratique [22] .

C'est pourquoi nous allons reprendre le problème traité au chapitre III dans l'espace $L^2(R,H)$ puis dans l'espace X , pour l'étudier dans l'espace $\mathcal{B}_r$ que nous allons préciser :

L'espace B désignera l'un des espaces suivants :
$L^2(R)$ espace des fonctions de carré l'intégrable en x sur $(-\infty, +\infty)$, ou $L^\infty(R) \cap L^2(R)$.

Dans le premier cas, la norme de f dans B sera la norme habituelle de $L^2(R)$, dans le second, ce sera la plus grande des deux normes dans $L^\infty(R)$ et $L^2(R)$. Nous noterons cette norme : $[f]_B$, que nous pourrons préciser soit par $||f||_{L^2(R)}$, ou par $[f]_{L^2(R) \cap L^\infty(R)}$.

L'espace $\mathcal{B}_r$ est l'espace des éléments de B pour lesquels l'expression suivante est finie, cette expression sera alors prise pour norme dans $\mathcal{B}_r$:

$$<f>_{\mathcal{B}_r} = \sup_{\vec{\xi} \in R^3} (1 + |\vec{\xi}|^2)^{r/2} [f]_B .$$

Nous pourrons préciser de quel espace $\mathcal{B}_r$ il s'agit, si besoin est, par les notations $\mathcal{B}_r(L^2(R))$, et $B_r(L^2(R) \cap L^\infty(R))$.

Dans ce chapitre, il n'est pas nécessaire de supposer que le comportement en $|\vec{\xi}|$, pour $|\vec{\xi}|$ infini, de $\nu(|\vec{\xi}|)$ est comparable à $|\vec{\xi}|$; par contre, il sera fondamental que $\nu(|\vec{\xi}|)$ soit borné inférieurement par $\nu(o)$, soit croissant pour $|\vec{\xi}|$ assez grand, et tende vers l'infini avec $|\vec{\xi}|$, comme $|\vec{\xi}|^\lambda$, $\lambda > o$.

Certains théorèmes seront énoncés lorsque le comportement de $\nu(|\vec{\xi}|)$ est linéaire en $|\vec{\xi}|$, pour simplifier les indices qui interviennent, uniquement.

La théorie des semi groupes d'opérateurs qui s'appliquait au problème dans l'espace $L^2(R,H)$, comme il a été vu au chapitre III ne s'applique plus ici : le domaine de l'opérateur $\mathcal{M}$ dans l'espace $\mathcal{B}_r$ n'est pas dense dans $\mathcal{B}_r$, $\mathcal{M}$ applique en effet son domaine dans $L^2(R)$ de $\mathcal{B}_r$ dans $\mathcal{B}_{r-1}$.

Il y a lieu, pour remédier à cet inconvénient, de tronquer le problème posé

$$(I) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + (\mathcal{M} - A)\, f = o & t > o \\ f_{|t=o} = f_o(x, \vec{\xi}) \end{cases}$$

et d'introduire le problème tronqué (I_α) au paragraphe I, ce qui nous permettra d'établir le théorème suivant :

Théorème

Si $f_o(x, \vec{\xi})$ appartient à $\mathcal{D}_r^k(B)$, c'est à dire appartient ainsi que ses k premières dérivées en x à $\mathcal{D}_r(B)$, domaine de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}_r(B)$, r réel positif, il existe une famille d'opérateurs $T(t, -\mathcal{M} + A)$, non continue en $t = o$, possédant les propriétés suivantes :

1 - $T(t, -\mathcal{M} + A)$ applique $\mathcal{D}_r^k(B)$ dans $\mathcal{B}_r^k(B)$, espace des éléments de $\mathcal{B}_r(B)$, dont les k premières dérivées en x sont dans $\mathcal{B}_r(B)$, et $T(t, -\mathcal{M} + A)$ est borné dans $\mathcal{B}_r^k(B)$ par $\exp(\omega_r t)$.

2 - Si $k \geqslant 1$, $r \geqslant 1 + \mu$, $\mu = \text{Sup.}(1, \lambda)$, l'élément $f(x, \vec{\xi}, t)$ défini par :

$$f(x,\vec{\xi},t) = T(t, -\mathcal{M} + A)\, f_o(x, \vec{\xi})$$ est tel que :

$\frac{\partial f}{\partial t}$, $\mathcal{M}f$ et Af appartiennent à $\mathcal{B}_{r-\mu-1}^{k-1}(B)$, et vérifient pour tout intervalle de temps borné,

pour $t > o$ $\quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M}f - Af = o$ dans $\mathcal{B}_{r-\mu-1}^{k-1}(B)$,

pour $t = o$ $\quad f(x,\vec{\xi},o) = f_o(x,\vec{\xi})$, dans $\mathcal{B}_r(B)$.

3 - Si de plus $r \geqslant 2$, l'élément $f(x,\vec{\xi},t)$ ainsi défini est l'unique solution dans $\mathcal{B}_r(B)$, et $T(t, -\mathcal{M} + A)$ admet pour borne dans $\mathcal{B}_r(B)$:

$$e^{-\nu(o)t}\{1+k_r t+k_r k_{r-1} \frac{t^2}{2!} +\ldots.+ k_r k_{r-1}\ldots k_1 \frac{t^r}{r!}+\ldots.+k_r\ldots k_1 k_o \pi \frac{e^{k_o t}}{k_o{}^r}\}$$

et dans $\mathcal{B}_r(L^2(R))$:

$$e^{-\nu(o)t}\{1+k_r t+ k_r\, k_{r-1} \frac{t^2}{2!} + \ldots\ldots \quad + k_k k_{r-1}\ldots k_1 k_o\, \pi \frac{t^{r+1}}{(r+1)!}\}$$

1 - <u>PROBLEME TRONQUE</u>

Définissons $\mathcal{M}_\alpha$ à partir de $\mathcal{M}$, par troncature en $\vec{\xi}$:

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M} \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| < \alpha$$
$$= o \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| \geqslant \alpha$$

Il sera commode de noter :

$$\nu_\alpha(|\vec{\xi}|) = \nu(|\vec{\xi}|) \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| < \alpha$$
$$= o \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| \geqslant \alpha .$$

Le problème tronqué est alors le suivant : étudier les éléments notés $f_\alpha(x, \vec{\xi}, t)$ solution de :

$$(I_\alpha) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathcal{T}_\alpha f_\alpha - A f_\alpha = o & t > o \\ f_\alpha\big|_{t=o} = f_o(x,\vec{\xi}) \end{cases}$$

Remarquons que l'opérateur A, qui opère de $\mathcal{B}_r$ dans $\mathcal{B}_{r+1}$, comme l'a montré Grad [17], n'a pas été tronqué ; la valeur initiale $f_o(x,\vec{\xi})$ non plus. La solution du problème tronqué, $f_\alpha(x, \vec{\xi}, t)$, non necessairement nulle pour $|\vec{\xi}| > \alpha$, sera alors étudiée pour α tendant vers l'infini, au paragraphe 2. Dans ce paragraphe, nous allons étudier $f_\alpha(x, \vec{\xi}, t)$ pour α donné, et nous allons établir des majorations qui seront utilisées pour la suite.

Notons k_{r+1} la norme de l'opérateur A agissant de $\mathcal{B}_r$ dans $\mathcal{B}_{r+1}$.

Lemme IV.1.1

L'opérateur résolvant $R(\lambda, -\mathcal{T}_\alpha)$ de l'opérateur $\mathcal{T}_\alpha$ est borné pour chaque $\vec{\xi}$, dans $L^2(R)$ et dans $L^2(R) \cap L^\infty(R)$, pour $\lambda > o$, par $\dfrac{1}{\nu_\alpha(|\vec{\xi}|) + \lambda}$.

Pour $|\vec{\xi}| < \alpha$, la résolvante est l'opérateur U_λ déjà étudié, dont la norme est bornée dans $L^2(R)$ par $\dfrac{1}{\nu(\vec{\xi})+\lambda}$ pourvu que $\lambda + \nu(o)$ soit positif.

Dans $L^\infty(R)$, nous obtenons la même majoration pour la norme de U_λ, il suffit d'appliquer à l'expression de $U_\lambda f$, produit de convolution :

$$|f * g|_{L^\infty(R)} \leq |f|_{L^1(R)} \; |g|_{L^\infty(R)}.$$

Pour $|\vec{\xi}| \geqslant \alpha$, la résolvante a la forme triviale

$$R(\lambda, - \mathcal{M}) \phi(x,\vec{\xi}) = \frac{1}{\lambda} \phi(x,\vec{\xi}),$$

dont la norme est dans B bornée par $\frac{1}{\lambda}$ pour $\lambda > o$.

Lemme IV.1.2

L'opérateur $- \mathcal{M}_\alpha$ est générateur d'un semi-groupe $T(t, - \mathcal{M}_\alpha)$ dans $L^2(R)$; $T(t, - \mathcal{M}_\alpha)$ est borné dans $L^2(R) \cap L^\infty(R)$ par $\exp(- \nu_\alpha(|\vec{\xi}|)t)$.

Le fait que l'opérateur $- \mathcal{M}_\alpha$ soit générateur dans $L^2(R)$ du semi-groupe $T(t, - \mathcal{M}_\alpha)$ est une conséquence directe des théorèmes déjà utilisés concernant les semi-groupes ; de même, la norme de $T(t, - \mathcal{M}_\alpha)$ dans $L^2(R)$ est bornée par $\exp(-\nu_\alpha(|\vec{\xi}|)t)$.

Il est à noter que $T(t, - \mathcal{M}_\alpha)$ n'est pas un semi-groupe dans l'espace $L^2(R) \cap L^\infty(R)$, car le domaine de $\mathcal{M}_\alpha$ n'est pas dense dans cet espace. Malgré tout, nous allons pouvoir établir que $T(t, - \mathcal{M}_\alpha)$ est un opérateur borné dans $L^2(R) \cap L^\infty(R)$.

Dans l'ouvrage de Hille et Phillips [26] page 352, théorème 11.6.6 il est établi que, si $T(t)$ est un semi-groupe d'opérateur engendré par M dans un espace de Banach, pour $t > o$:

$$T(t) = \lim_{k \to \infty} \{\frac{k}{t} \mathcal{R}(\frac{k}{t}, M)\}^k.$$

Ici, nous avons donc, dans $L^2(R)$, pour $t > o$:

$$T(t, - \mathcal{M}_\alpha) = \lim_{k \to \infty} \{\frac{k}{t} \mathcal{R}(\frac{k}{t}, - \mathcal{M}_\alpha)\}^k.$$

Intervient alors le fait de la résolvante $R(\frac{k}{t}, \mathcal{M}_\alpha)$ a aussi un sens dans $L^2(R) \cap L^\infty(R)$, sa norme y étant bornée par

$$\frac{1}{\nu_\alpha(\vec{\xi}) + \frac{k}{t}}.$$

Dans l'espace $L^2(R) \cap L^\infty(R)$, on en déduit que l'opérateur $\{\frac{k}{t}\ \mathcal{R}(\frac{k}{t}, -\mathcal{M}_\alpha)\}^k$ a une limite quand k tend vers l'infini, $t > o$ et la norme de cette limite est bornée par :

$$\lim_{k\to\infty} \{\frac{k}{t}\ \frac{1}{\nu_\alpha(\vec{\xi}) + \frac{k}{t}}\}^k = \exp(-\nu_\alpha(|\vec{\xi}|)t), \text{ pour } t > o\ ,$$

ce qui établit que l'opérateur $T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$ est borné dans $L^2(R) \cap L^\infty(R)$ par $\exp(-\nu_\alpha(\vec{\xi})t)$, bien que n'étant pas un semi-groupe, pour $t > o$. Notamment, la limite dans $L^2(R) \cap L^\infty(R)$ de $(T(t, -\mathcal{M}_\alpha) - I)$ n'est pas nulle quand t tend vers zéro. Pour $t = o$, on a cependant $T(o) = I$.

Lemme IV.1.3

$-\mathcal{M}_\alpha$ est générateur d'un semi-groupe dans $\mathcal{B}_r(L^2(R))$, que l'on notera encore $T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$, dont la norme dans $\mathcal{B}_r(L^2(R) \cap L^\infty(R))$ est bornée par 1 pour $t \geq o$.

L'opérateur $-\mathcal{M}_\alpha$ est de domaine dense dans $\mathcal{B}_r(L^2(R))$, et sa résolvante est bornée par $\frac{1}{\lambda}$ pour $\lambda > o$ dans $\mathcal{B}_r(L^2(R))$, ce qui établit la première partie du lemme, $T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$ est borné par 1 dans $\mathcal{B}_r(L^2(R))$ pour $t > o$. D'autre part $T(o, -\mathcal{M}_\alpha) = I$.

La deuxième partie s'obtient comme au Lemme IV.1.2.

Proposition IV.1.1

L'opérateur $-\mathcal{M}_\alpha + A$ engendre un semi-groupe d'opérateurs $T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)$ dans l'espace $\mathcal{B}_r(L^2(R))$, borné par $\exp(k_r t)$, de plus : $T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)$ est borné dans $\mathcal{B}_r(L^2(R) \cap L^\infty(R))$ par $\exp(k_r t)$.

Considérons l'opérateur $-\mathcal{M}_\alpha + A$ comme perturbation de l'opérateur $-\mathcal{M}_\alpha$, par l'opérateur $+A$, borné par k_r de $\mathcal{B}_r(L^2(R))$ dans lui même. La norme de l'opérateur $T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)$

s'obtient alors comme au chapitre III.

A étant aussi borné par k_r dans $\mathcal{B}_r(L^2(R) \cap L^\infty(R))$, la fin de la proposition s'obtient comme précédemment.

Proposition IV.1.2

(1) $T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)$ vérifie pour $t \geq o$ dans $L^2(R)$, ainsi que dans $L^2(R) \cap L^\infty(R))$, l'inégalité :

$$\left[T(t,-\mathcal{M}_\alpha+A)f_o\right]_B \leq \exp(-\nu_\alpha(|\vec{\xi}|)t)\left[f_o\right]_B + \frac{k_r}{(1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}} \frac{\exp(k_{r-1}t)-\exp(-\nu_\alpha(\vec{\xi})t)}{k_{r-1}+\nu_\alpha(|\vec{\xi}|)} <f_o>_{\mathcal{B}_{r-1}}.$$

La théorie des semi groupes d'opérateurs permet d'écrire dans $L^2(R)$ pour $t \geq o$ la relation entre $T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$ et $T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)$:

$$T(t, -\mathcal{M}_\alpha+A)f_o = T(t, -\mathcal{M}_\alpha)f_o + \int_o^t T(t-\tau, \mathcal{M}_\alpha)A\, T(\tau,-\mathcal{M}_\alpha+A)f_o\, d\tau ,$$

qui conduit à la majoration dans $L^2(R)$.

$$\left[T(t,-\mathcal{M}_\alpha+A)f_o\right]_{L^2(R)} \leq \left[T(t,-\mathcal{M}_\alpha)f_o\right]_{L^2(R)} + \int_o^t \left[T(t-\tau)\,-\mathcal{M}_\alpha)\, A\, T(\tau, -\mathcal{M}_\alpha + A)f_o\right]_{L^2(R)} d\tau,$$

d'où, appliquant les majorations pour $t \geq o$:

$$\left[T(t, -\mathcal{M}_\alpha)f_o\right]_{L^2(R)} \leq \exp(-\nu_\alpha(\vec{\xi})\, t)\left[f_o\right]_{L^2(R)} ,$$

$$\left[T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)f_o\right]_{L^2(R)} \leq \exp(-\nu_\alpha(|\vec{\xi}|)\, t)\left[f_o\right]_{L^2(R)} + \int_o^t \exp(-\nu_\alpha(\vec{\xi})\,(t-\tau))\,\left[A\, T(\tau, -\mathcal{M}_\alpha + A)\right]_{L^2(R)} d\tau.$$

Mais cette majoration est aussi vraie dans l'espace B, pour $t \geq o$, soit :

$$\left[T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)\, f_o\right]_B \leq \exp(-\nu_\alpha(|\vec{\xi}|)t)\,\left[f_o\right]_B + \int_o^t \exp(-\nu_\alpha(\vec{\xi})\,(t-\tau))\,\left[A T(\tau, -\mathcal{M}_\alpha + A)\right]_B\, d\tau$$

Utilisons la propriété de A d'être borné par k_r de $\mathcal{B}_r$ dans $\mathcal{B}_{r-1}$:

$$\left[A\,T(\tau,\ \mathcal{M}_\alpha - A)f_o\right]_B \leqslant \frac{1}{(1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}} < A\,T(\tau,\ \mathcal{M}_\alpha - A)f_o > \mathcal{B}_r$$

$$\leqslant \frac{k_r}{(1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}} \exp(k_{r-1}\,\tau) \quad <f_o> \mathcal{B}_{r-1}$$

ceci tenant compte de la proposition IV.1.1.

Le calcul de l'intégrale entre o et t conduit au résultat.

Notons $f_\alpha(x, \vec{\xi}, t)$ la solution du problème (I_α) :

$$f_\alpha(x, \vec{\xi}, t) = T(t, -\ \mathcal{M}_\alpha + A)\ f_o(x, \vec{\xi}),$$

et étudions la convergence de $f_\alpha(x, \vec{\xi}, t)$ quand α tend vers l'infini, puis, dans une autre étape, nous étudierons dans quelle mesure cette limite vérifie le problème (I) posé.

Ceci nous conduira au théorème annoncé au début.

2 - CONVERGENCE DE $f_\alpha(x, \vec{\xi}, t)$ QUAND α TEND VERS L'INFINI

Nous étudierons cette convergence dans l'espace $\mathcal{B}_r(B)$. Le domaine de l'opérateur $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}_r(B)$ sera noté $\mathcal{D}_r(B)$, ensemble des fonctions $f(x, \vec{\xi})$ telles que $\mathcal{M}f$ appartienne à l'espace $\mathcal{B}_r(B)$. Etablissons la propriété :

Proposition IV. 2.1

Si $f_o(x, \vec{\xi})$ est élément de $\mathcal{D}_r(B)$, l'élément de $\mathcal{B}_r(B)$ défini par :

$$f_\alpha(x, \vec{\xi}, t) = T(t, -\ \mathcal{M}_\alpha + A)\ f_o(x, \vec{\xi})$$

converge dans $\mathcal{B}_r(B)$ quand α tend vers l'infini, uniformément en t sur tout intervalle de temps fini.

Nous allons établir que, dans l'espace $\mathcal{B}_r(B)$, f_{α_o+N}, où N est entier, est une suite de Cauchy quand N tend vers l'infini, pour tout α_o, sa limite dans $\mathcal{B}_r(B)$ est indépendante de α_o.

Il suffit pour cela de montrer que :

$\langle f_\alpha - f_\beta \rangle_{\mathcal{B}_r(B)}$ tend vers zéro quand α et β tend vers l'infini.

Les élements f_α et f_β sont par définition, solutions respenctivement des problèmes (I_α) et (I_β), soit :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathcal{M}_\alpha f_\alpha - A f_\alpha = o \ , \qquad f_\alpha\Big|_{t=o} = f_o \ ;$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \mathcal{M}_\beta f_\beta - A f_\beta = o \ , \qquad f_\beta\Big|_{t=o} = f_o \ ;$$

Afon d'étudier directement la différence $(f_\alpha - f_\beta)$, nous allons considérer $f_\alpha - f_\beta$ comme solution du problème suivant, où nous avons dû rompre la symétrie entre les paramètres α et β :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(f_\alpha - f_\beta) + \mathcal{M}_\alpha (f_\alpha - f_\beta) - A(f_\alpha - f_\beta) = (\mathcal{M}_\beta - \mathcal{M}_\alpha) f_\alpha \\ (f_\alpha - f_\beta)\Big|_{t=o} = o \end{cases}$$

Le fait de n'avoir pas tronqué la valeur initiale $f_\alpha\Big|_{t=o}$ dans le problème I_αa, comme nous le voyons, l'avantage de nous conduire à un problème à valeur initiale nulle.

La dissymétrie introduite entre α et β, pour nous permettre d'appliquer des résultats obtenus jusqu'a maintenant, à $(f_\alpha - f_\beta)$, va nous obliger à supposer une relation d'ordre entre les réels α et β. Seul le choix $\alpha < \beta$ conviendra à cette étude. Dans ce cas, en effet, pour $|\vec{\xi}| > \beta$ et $|\vec{\xi}| < \beta$ l'équation est homogène, et, sur l'intervalle $\alpha < |\vec{\xi}| < \beta$, nous pourrons appliquer à f_β, solution du problème (I_β), l'inégalité (1) obtenue à la proposition IV.1.2, ce qui nous fournira la convergence cherchée quand α tendra vers l'infini.

La solution du problème (2) se met dans $\mathcal{B}_r(L^2(R))$ sous la forme intégrale :

$$f_\alpha - f_\beta = \int_o^t T(t-\tau, -\mathcal{M}_\alpha + A)(\mathcal{M}_\beta - \mathcal{M}_\alpha) f_\beta(\tau)\, d\tau,$$

d'où l'on déduit la majoration dans $\mathcal{B}_r(B)$

$$(3) \qquad \langle f_\alpha - f_\beta \rangle_{\mathcal{B}_r(B)} \leq \int_o^t e^{k_r(t-\tau)} \langle (\mathcal{M}_\beta - \mathcal{M}_\alpha) f_\beta(\tau) \rangle_{\mathcal{B}_r(B)} d\tau.$$

Définissons l'opérateur $\bar{\omega}_{\alpha\beta}$ par :

$\bar{\omega}_{\alpha\beta} f = f$ si $\alpha \leq |\vec{\xi}| < \beta$

$= o$ si $|\vec{\xi}| \geq \beta$, ou si $|\vec{\xi}| < \alpha$, d'où :

$(\mathcal{M}_\beta - \mathcal{M}_\alpha) f_\beta(\tau) = \bar{\omega}_{\alpha\beta} \mathcal{M}_\beta f_\beta(\tau)$

$f_\beta(\tau)$ étant la solution de (I_β), est donnée dans $\mathcal{B}_r(B)$ par :

$$f_\beta(\tau) = T(\tau, \mathcal{M}_\beta - A) f_o(x, \vec{\xi})$$

Afin de montrer que l'expression $\mathcal{M}_\beta f_\beta$ a bien un sens dans $\mathcal{B}_r(B)$, établissons que f_β appartient au domaine de $\mathcal{M}_\beta$, pourvu que $f_o(x, \vec{\xi})$ appartienne à $\mathcal{D}_r(B)$.

Remarquons que, si f_o appartient au domaine de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}_r(B)$, alors il appartient nécessairement au domaine de $\mathcal{M}_\beta - A$ dans $\mathcal{B}_r(B)$. La théorie des semi groupes montre que :

$T(\tau, - \mathcal{M}_\beta + A) f_o$ est élément du domaine de $\mathcal{M}_\beta$ dans $\mathcal{B}_r L^2(R)$, en effet :

$$(- \mathcal{M}_\beta + A) T(\tau, - \mathcal{M}_\beta + A) f_o = T(\tau, - \mathcal{M}_\beta + A) (- \mathcal{M}_\beta + A) f_o.$$

Il suffit donc d'établir que cette relation est encore vraie dans l'espace $\mathcal{B}_r(L^2(R) \cap L^\infty(R))$ pour $t > o$.

Pour $t = o$, elle est en effet triviale.

Rappelons que, pour $t > o$, dans $\mathcal{B}_r L^2(R)$ on a :

$$T(t, - \mathcal{M}_\beta + A) = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{t} \mathcal{R}\left(\frac{k}{t}, - \mathcal{M}_\beta + A\right)\right)^k.$$

Les opérateurs $- \mathcal{M}_\beta + A$ et $\mathcal{R}(\lambda, - \mathcal{M}_\beta + A)$ commutent dans $\mathcal{D}_r(L^2(R))$ et dans $\mathcal{D}_r(L^2(R) \cap L^\infty(R))$, le calcul formel a en effet un sens dans $\mathcal{D}_r(L^2(R))$ et $\mathcal{D}_r(L^2(R) \cap L^\infty)$ ce qui prouve la relation d'interve ion pour $t > o$.

Nous pouvons alors évaluer $\mathcal{M}_\beta f_\beta(\tau)$:

$$\mathcal{M}_\beta f_\beta(\tau) = (\mathcal{M}_\beta - A) f_\beta(\tau) + A f_\beta(\tau)$$

$$= T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A)(\mathcal{M}_\beta - A) f_o + A\, T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A) f_o ,$$

et nous devons, pour reporter dans l'inégalité (3), majorer les deux termes :

$$\langle \bar{\omega}_{\alpha\beta}\, T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A)(\mathcal{M}_\beta - A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_r} \quad \text{et} \quad \langle \bar{\omega}_{\alpha\beta}\, A\, T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_r}.$$

Remarquons que :

$$\langle \phi \rangle_{\mathcal{B}_r} = \left\langle \frac{\phi}{(1 + |\vec{\xi}|^2)^{1/2}} \right\rangle_{\mathcal{B}_{r+1}} , \quad \text{soit}$$

$$\langle \bar{\omega}_{\alpha\beta}\, \phi \rangle_{\mathcal{B}_r} < \max_{|\vec{\xi}| \in (\alpha,\beta)} \frac{1}{(1 + |\vec{\xi}|^2)^{1/2}} \langle \phi \rangle_{\mathcal{B}_{r+1}} , \quad \text{d'où}$$

$$\langle \bar{\omega}_{\alpha\beta}\, A\, T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_{r(B)}} \leq \frac{1}{(1+\alpha^2)^{1/2}} < A\, T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_{r+1}(B)}$$

A étant borné de $\mathcal{B}_{r+1}$ dans $\mathcal{B}_r$, par k_{r+1} ,

$$\langle \bar{\omega}_{\alpha\beta}\, A\, T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_r(B)} \leq \frac{1}{(1+\alpha^2)^{1/2}} k_{r+1} < T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_r(B)}$$

d'où, suivant la majoration de la proposition IV.1.1 :

$$(4) \quad \langle \bar{\omega}_{\alpha\beta}\, A\, T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_r(B)} \leq \frac{1}{(1+\alpha^2)^{1/2}} k_{r+1}\, e^{k_r \tau} \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r(B)}$$

Pour l'autre terme, nous allons faire appel à l'inégalité (1) appliquée pour l'indice β , à la valeur initiale $(-\mathcal{M}_\beta + A) f_o$:

$$\langle \bar{\omega}_{\alpha\beta}\, T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A)(-\mathcal{M}_\beta + A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_r(B)}$$

$$\leq \operatorname*{Max}_{|\vec{\xi}| \in (\alpha,\beta)} \Big\{ (1 + |\vec{\xi}|^2)^{r/2}\, e^{-\nu_\beta(\vec{\xi})\tau} \big[(\mathcal{M}_\beta - A) f_o\big]_B + \frac{k_r}{k_{r-1} + \nu_\beta(\vec{\xi})} \left(e^{k_{r-1}\tau} - e^{-\nu_\beta(\vec{\xi})\tau}\right) < (\mathcal{M}_\beta - A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_{r-1}(B)} \Big\}$$

Par hypothèse, $\nu(\vec{\xi})$ tend vers l'infini avec $|\vec{\xi}|$.

Posons $\nu(\alpha) = \inf_{|\vec{\xi}| = \alpha} \nu(\vec{\xi})$.

Il en résulte que $\nu(\alpha)$ tend vers l'infini avec α , et :

$$(5) \quad \langle \bar{\omega}_{\alpha\beta}\, T(\tau, -\mathcal{M}_\beta + A)(\mathcal{M}_\beta - A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_r(B)}$$

$$\leq \langle (\mathcal{M}_\beta - A) f_o \rangle_{\mathcal{B}_r(B)} \left[e^{-\nu(\alpha)\tau} + \frac{k_r}{k_{r-1} + \nu(\alpha)} \left(e^{k_{r-1}\tau} - e^{-\nu(\alpha)\tau}\right) \right]$$

Reportons maintenant les majorations (4) et (5) dans l'inégalité (3). Le résultat explicite n'offre pas d'intérêt, seule importe sa forme, c'est à dire :

$$\phi(t)\left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^{1/2}} + \frac{1}{\nu(\alpha)}\right) ,$$

où $\phi(t)$ est la somme de produits de polynômes en t et d'exponentielles en t. $\phi(t)$ est donc bornée sur tout intervalle $(0,T)$ borné, ce qui montre bien que, sur tout intervalle de temps borné, $<f_\beta - f_\alpha>_{\mathcal{B}_r(B)}$ converge vers zéro, uniformément en t, quand α et β tendent vers l'infini.

Nous noterons $f(x, \vec{\xi}, t)$ la limite de $f_\alpha(x, \vec{\xi}, t)$ quand α tend vers l'infini. Il en résulte que $f(x, \vec{\xi}, t)$ est bornée dans $\mathcal{B}_r(B)$ par $e^{k_r t} <f_o>_{\mathcal{B}_r(B)}$, et est égale à $f_o(x,\vec{\xi})$ pour $t=o$.

Nous pouvons encore énoncer.

Théorème IV.2.1

Il existe une famille d'opérateurs $T(t, -\mathcal{M}+A)$ de $\mathfrak{D}_r(B)$ dans $\mathcal{B}_r(B)$, où B est soit $L^2(R)$, soit $L^2(R) \cap L^\infty(R)$, telle que :

pour $t=o$ $\quad T(o, -\mathcal{M}+A)\, f_o(x,\vec{\xi}) = f_o(x,\vec{\xi})$

pour $t>o$ $\quad T(t, -\mathcal{M}+A)\, f_o = \lim_{\alpha\to\infty} T(t, -\mathcal{M}_\alpha+A)\, f_o$

$$<T(t, -\mathcal{M}+A)\, f_o>_{\mathcal{B}_r(B)} \leq e^{k_r t} <f_o>_{\mathcal{B}_r(B)} .$$

$T(t, -\mathcal{M}+A)$ est limite uniforme en t sur tout intervalle $(0,T)$ fini de $T(t, -\mathcal{M}_\alpha+A)$ quand α tend vers l'infini.

Etudions maintenant la convergence, quand α tend vers l'infini, de $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$, Af_α, et $\mathcal{M}_\alpha f_\alpha$, dans le paragraphe 3.

3 - Régularité de $f(x,\vec{\xi},t)$. Convergence de $\mathcal{M}_\alpha f_\alpha$ quand α tend vers l'infini .

L'étude de la convergence de Af_α quand α tend vers l'infini est résolue par le lemme suivant :

Lemme IV.3.1

Si f_o appartient à $\mathcal{D}_r(B)$, $AT(t, -\mathcal{M}_\alpha+A)f_o$ converge quand α tend vers l'infini, vers $AT(t, -\mathcal{M}+A)f_o$, dans l'espace $\mathcal{B}_{r+1}(B)$, et la convergence est uniforme en t sur tout intervalle $(0,T)$ borné.

Il suffit de rappeler que A est borné de $\mathcal{B}_r(B)$ dans $\mathcal{B}_{r+1}(B)$, et d'appliquer le théorème IV.2.1.

Avant d'étudier la convergence de $\mathcal{M}_\alpha f_\alpha$ quand α tend vers l'infini, nous pouvons faire la remarque suivante :

Les dérivées partielles en x de $f(x,\vec{\xi},t)$ solution de (I) vérifient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^P f}{\partial x^P} + \mathcal{M}\dfrac{\partial^P f}{\partial x^P} - A\dfrac{\partial^P f}{\partial x^P} = o \\ \dfrac{\partial^P f}{\partial x^P}\Big|_{t=o} = \dfrac{\partial^P f_o}{\partial x^P}(x,\vec{\xi}) , \end{cases}$$

et tout ce qui précède peut s'appliquer aux dérivées partielles de $f_\alpha(x,\vec{\xi},t)$, pourvu que les dérivées partielles de $f_o(x,\vec{\xi})$ d'ordre correspondant appartiennent au domaine de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}_r(B)$.

Nous prendrons la notation suivante :

$\mathcal{B}_r^{\,k}(B)$ est l'espace des éléments de $\mathcal{B}_r(B)$ dont les dérivées par rapport à x jusqu'à l'ordre k appartiennent à $\mathcal{B}_r(B)$.

$\mathcal{D}_r^{\,k}(B)$ est le domaine de $\mathcal{M}$ dans l'espace $\mathcal{B}_r^{\,k}(B)$.

Nous allons préciser la croissance de $\nu(\vec{\xi})$ pour $|\vec{\xi}|$ infini, et nous supposerons que pour $|\vec{\xi}|$ infini, $\nu(\vec{\xi})$ est équivalent à $|\vec{\xi}|^{\lambda}$. Pour $\lambda = 1$, hypothèse classique, nous obtiendrons une expression particulière du résultat.

Proposition IV.3.1

Si $f_o(x,\vec{\xi})$ est élément de $\mathcal{D}_r^k(B)$, $\mathcal{M}_\alpha T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A) f_o$ converge dans $\mathcal{B}_{r-1-\mu}^{k-1}(B)$ quand α tend vers l'infini, uniformément en t sur tout intervalle de temps borné, vers $\mathcal{M} T(t, -\mathcal{M} + A) f_o$, où $\mu = \mathrm{Sup}(1,\lambda)$.

$f(x,\vec{\xi},t)$ étant l'élément de $\mathcal{B}_r(B)$ défini au paragraphe 2 par $f(x,\vec{\xi},t) = \lim_{\alpha\to\infty} f_\alpha(x,\vec{\xi},t)$, nous allons étudier la limite de $\mathcal{M}_\alpha f_\alpha - \mathcal{M} f$ par l'intermédiaire suivant :

$$U(\mathcal{M}_\alpha f_\alpha - \mathcal{M} f) = f_\alpha - f \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| < \alpha$$
$$= -f \quad \text{si} \quad |\vec{\xi}| \geq \alpha$$

La remarque précédente nous montre que $U(\mathcal{M}_\alpha f_\alpha - \mathcal{M} f)$ est un élément de $\mathcal{B}_r^k(B)$ pourvu que f_o appartienne à $\mathcal{D}_r^k(B)$, en effet, $f_\alpha - f$ et f sont chacun dans cet espace, et $\frac{\partial^P}{\partial x^P}\left[U(\mathcal{M}_\alpha f_\alpha - \mathcal{M} f)\right] = U\left[\mathcal{M}_\alpha \frac{\partial^P f_\alpha}{\partial x^P} - \mathcal{M}\left(\frac{\partial^P f}{\partial x^P}\right)\right]$, d'où :

$$\langle U(\mathcal{M}_\alpha f_\alpha - \mathcal{M} f)\rangle_{\mathcal{B}_r^k(B)} \leq \langle \bar{\omega}_{o\alpha}(f_\alpha - f)\rangle_{\mathcal{B}_r^k(B)} + \langle \bar{\omega}_{\alpha\infty} f\rangle_{\mathcal{B}_r^k(B)},$$

où $\langle\phi\rangle_{\mathcal{B}_r^k(B)} = \sum_{P=o}^{P=k} \left\langle \frac{\partial^P \phi}{\partial x^P} \right\rangle_{\mathcal{B}_r(B)}$.

$\langle \bar{\omega}_{o\alpha}(f_\alpha - f)\rangle_{\mathcal{B}_r^k(B)} \leq \langle f_\alpha - f\rangle_{\mathcal{B}_r^k(B)}$, quantité qui converge vers zéro quand $\alpha \to \infty$, d'après le paragraphe 2, et la remarque précédente, la convergence a d'ailleurs lieu uniformément en t sur un intervalle $(0,T)$.

$$\langle \bar{\omega}_{\alpha\infty} f\rangle_{\mathcal{B}_r^k(B)} = \max_{|\vec{\xi}|>\alpha} \left((1 + |\vec{\xi}|^2)^{r/2} [f]_{B^k}\right)$$
$$\leq \frac{1}{(1+\alpha^2)^{1/2}} \langle f\rangle_{\mathcal{B}_{r+1}^k(B)}$$

Nous pouvons donc conclure que pour $r \geq 1$,

Si $f_o(x, \vec{\xi})$ appartient à $\mathcal{D}_r^k(B)$, $U(\mathcal{M}_\alpha f_\alpha - \mathcal{M}f)$ converge vers zéro dans $\mathcal{B}_{r-1}^k(B)$ quand α tend vers l'infini, uniformément en t sur $(0,T)$.

Il s'en suit que, pour $r \geq 1 + \mu$, $\mu = \mathrm{Sup}(1, \lambda)$

$\nu(\vec{\xi})\ U\ (\mathcal{M}_\alpha f_\alpha - \mathcal{M}f)$ converge vers zéro dans $\mathcal{B}_{r-1-\mu}^k(B)$

$\xi \frac{\partial}{\partial x}\ U\ (\mathcal{M}_\alpha f_\alpha - \mathcal{M}f)$ converge vers zéro dans $\mathcal{B}_{r-1-\mu}^{k-1}(B)$,

d'où le résultat.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer :

Théorème IV.3.1

Si $f_o(x,\vec{\xi})$ ainsi que ses dérivées par rapport à x jusqu'à l'ordre k appartiennent au domaine de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}_r(B)$, l'opérateur $T(t, -\mathcal{M}+A)$ défini par :

$$T(t, -\mathcal{M}+A) = \lim_{\alpha\to\infty} T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)$$

est borné dans $\mathcal{B}_r^k(B)$ par $\exp k_r t$, et,

si $k \geq 1$, et $r \geq 1 + \mu$, où $\mu = \mathrm{Sup}(1, \lambda)$, l'élément $f(x,\vec{\xi},t)$ de $\mathcal{B}_r^k(B)$ défini par :

$$f(x,\vec{\xi},t) = T(t, -\mathcal{M}+A)\ f_o(x,\vec{\xi})$$

est tel que $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\mathcal{M}f$ et Af appartiennent à $\mathcal{B}_{r-\mu-1}^{k-1}(B)$ et vérifient pour $t > o$ borné dans $\mathcal{B}_{r-\mu-1}^{k-1}(B)$ la relation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M}f - Af = o \quad , \text{ et, dans } \mathcal{B}_r^k(B)$$

$$f(x,\vec{\xi},t) = f_o(x,\vec{\xi})$$

Si $r \geq 2$, f est l'unique solution du problème.

L'unicité de la solution du problème (I) dans $\mathcal{B}_r(B)$ est une conséquence directe du chapitre III : pour $r \geq 2$, l'espace $\mathcal{B}_r(B)$ est inclus dans $L^2(R,H)$, et nous avons vu au chapitre III que la solution du problème est unique dans cet espace, puisque la relation était fournie par un semi-groupe d'opérateurs.

Pour établir le théorème IV.3.1, nous allons utiliser les remarques faites sur la convergence uniforme en t sur tout intervalle borné, de Af_α et de $\mathcal{M}_\alpha f_\alpha$, ainsi que de f_α, dans $\mathcal{B}^{k-1}_{r-\mu-1}(B)$, quand α tend vers l'infini. Ce n'est que dans ce résultat final qu'intervient cette convergence uniforme : f_α vérifiant la relation I_α, $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$ vaut dans $\mathcal{B}^{k-1}_{r-\mu-1}(B)$: $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \mathcal{M}_\alpha f_\alpha - Af_\alpha$, et, de ce fait, $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$ converge uniformément en t, sur tout intervalle borné, quand α tend vers l'infini.

Il en résulte que pour t borné :

f est dérivable en t

$\frac{\partial f}{\partial t}$ est la limite uniforme de $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$ quand α tend vers l'infini, dans $\mathcal{B}^{k-1}_{r-\mu-1}(B)$, et f vérifie pour t borné la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{M}f - Af \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}^{k-1}_{r-\mu-1}(B)$$

La majoration de $T(t, -\mathcal{M}+A)$ dans $\mathcal{B}^k_r(B)$ résulte de la remarque concernant les dérivées par rapport a x de $f(x,\vec{\xi},t)$.

Remarques

Dans l'espace $L^2(R)$, l'opérateur $T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)$ est un semi-groupe, de même dans l'espace $\mathcal{B}_r(L^2(R))$. Cette propriété n'est pas conservée à la limite pour la famille $T(t, -\mathcal{M}+A)$, le domaine de $\mathcal{M}$ n'est en effet pas dense dans $\mathcal{B}_r(L^2(R))$.

La théorie pour l'espace $L^2(R)$ seulement ne saurait s'appliquer au cas non linéaire : il convient en effet, pour traiter le terme quadratique, de posséder des résultats concernant le cas linaire dans les deux espaces $L^2(R)$ et $L^\infty(R)$. La théorie des semi-groupes, valable dans $L^2(R)$ nous permet ainsi d'obtenir des résultats dans $L^2(R) \cap L^\infty(R)$, alors que, directement, il était impossible de le faire dans $L^\infty(R)$.

Remarquons que la solution trouvée, $f(x,\vec{\xi},t)$, n'est pas continue en $t = o$ dans $\mathcal{B}_r(B)$.

Notre but va maintenant être d'améliorer la majoration de $T(t, -\mathcal{M} + A)$ dans $\mathcal{B}_r^k(B)$, en tenant compte des propriétés de l'opérateur A borné de $\mathcal{B}_r$ dans $\mathcal{B}_{r+1}$ d'une part, et de la majoration dans $L^2(R)$ et dans $L^2(R) \cap L^\infty(R)$ du semi groupe engendré par $-\mathcal{M}$ dans $L^2(R)$, qui, comme on le sait décroit exponentiellement au cours du temps, pour toute valeur de $\vec{\xi}$.

4 - Majorations de $T(t, -\mathcal{M} + A)f_o$ au cours du temps

Rappelons que, pour tout $\vec{\xi}$, l'opérateur $-\mathcal{M}$ est générateur d'un semi groupe $T(t, -\mathcal{M})$ dans $L^2(R)$, borné par $\exp(-\nu(\vec{\xi})t)$, comme il a été indiqué au chapitre III. Le raisonnement fait au Lemme IV.1.1 s'applique à l'opérateur $-\mathcal{M}$ et non seulement à $-\mathcal{M}_\alpha$, ce qui montre :

Lemme IV.4.1

L'opérateur $-\mathcal{M}$ est générateur d'un semi groupe $T(t, -\mathcal{M})$ dans $L^2(R)$, et l'opérateur $T(t, -\mathcal{M})$ est borné dans $L^2(R) \cap L^\infty(R)$ par $\exp(-\nu(\vec{\xi})t)$, et dans $\mathcal{B}_r(B)$ par $\exp(-\nu(o)t)$.

C'est afin d'employer cette décroissance exponentielle de $T(t, -\mathcal{M})$ dans la majoration de $T(t, -\mathcal{M} + A)$ que nous allons étudier la convergence de $T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$ quand α tend vers l'infini, afin d'obtenir pour $T(t, -\mathcal{M} + A)$ une majoration analogue de l'inégalité (1).

Lemme IV.4.2

Si $f_o(x,\vec{\xi})$ est élément de $\mathcal{D}(B)$, domaine de $\mathcal{M}$ dans B, l'élément de B défini par : $f_\alpha(x,\vec{\xi},t) = T(t, -\mathcal{M}_\alpha)\, f_o(x,\vec{\xi})$, converge dans B quand α tend vers l'infini, uniformément en t.

Le raisonnement fait à la proposition IV.2.1 s'applique à l'opérateur $-\mathcal{M}_\alpha$, au lieu de $-\mathcal{M}_\alpha + A$, soit :

$$f_\alpha - f_\beta = \int_o^t T(t-\tau, -\mathcal{M}_\alpha)\,(\mathcal{M}_\beta - \mathcal{M}_\alpha)\, f_\beta(\tau)\, d\tau \ , \quad \text{d'où}$$

$$\left[f_\alpha - f_\beta\right]_B \leq \int_o^t \exp(-\nu_\alpha(\vec{\xi})(t-\tau))\, \left[\bar{\omega}_{\alpha\beta}\ \mathcal{M}_\beta\, f_\beta(\tau)\right]_B d\tau$$

et, pourvu que f_o appartienne au domaine de $\mathcal{M}$ dans B :

$$\mathcal{M}_\beta\, f_\beta(\tau) = T(\tau, -\mathcal{M}_\beta)\ \mathcal{M}_\beta\, f_o$$

$$\left[\bar{\omega}_{\alpha\beta}\, \mathcal{M}_\beta\, f_\beta(\tau)\right]_B \leq \bar{\omega}_{\alpha\beta}\ \exp(-\nu_\beta(\vec{\xi})\tau)\ \left[\mathcal{M}_\beta\, f_o\right]_B \ , \quad \text{soit}$$

$$\left[f_\alpha - f_\beta\right]_B \leq \exp(-\nu_\alpha(\vec{\xi})t)\ \left[\mathcal{M}_\beta\, f_o\right]_B \int_o^t \exp\left[(\nu_\alpha(\vec{\xi}) - \nu_\beta(\vec{\xi}))\tau\right]\bar{\omega}_{\alpha\beta}\, d\tau.$$

On a donc :

$$\left[f_\alpha - f_\beta\right]_B = o \quad \text{si} \quad \bar{\omega}_{\alpha\beta} = o \ , \quad \text{et,}$$

$$\left[f_\alpha - f_\beta\right]_B \leq \frac{1}{\nu_\beta(\vec{\xi})}\ \left[\mathcal{M}_\beta\, f_o\right]_B$$

$$\left[f_\alpha - f_\beta\right]_B \leq \frac{1}{\nu_\beta(\vec{\xi})}\ \left[\mathcal{M}\, f_o\right]_B \ , \quad \text{pour} \quad \alpha < |\vec{\xi}| < \beta \ ,$$

ce qui montre que, pour tout $\vec{\xi}$, $f_\alpha - f_\beta$ converge vers zéro dans B quand α tend vers l'infini, et f_α a une limite dans B quand α tend vers l'infini : $f = \lim_{\alpha\to\infty} T(t,-\mathcal{M}_\alpha)\, f_o$.

Soit $\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})$ la limite de $T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$ dans B quand α tend vers l'infini. Il est à noter que $\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})$ est aussi la limite de $T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$ dans $\mathcal{B}_r(B)$. L'opérateur $\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})$ ainsi défini admet la majoration uniforme de $T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$:

$$\left[\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})\right]_B \leq 1$$

Nous pouvons énoncer, de manière analogue au théorème IV.2.1 les résultats précédents dans l'espace $\mathcal{B}_r(B)$, que nous allons employer par la suite :

Proposition IV.4.1

Il existe une famille d'opérateurs $\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})$ de $\mathcal{D}_r(B)$ dans $\mathcal{B}_r(B)$, telle que :

pour $t = o$ $\quad \mathcal{C}(o, -\mathcal{M})\, f_o(x, \vec{\xi}) = f_o(x, \vec{\xi})$

pour $t > o$ $\quad \mathcal{C}(t, -\mathcal{M})\, f_o(x, \vec{\xi}) = \lim_{\alpha \to \infty} T(t, -\mathcal{M}_\alpha)\, f_o$

$$\| \mathcal{C}(t, -\mathcal{M}) f_o \|_{\mathcal{B}_r(B)} \leq \| f_o \|_{\mathcal{B}_r(B)}$$

$T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$ converge uniformément en t vers $\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})$ dans $\mathcal{B}_r(B)$ quand α tend vers l'infini.

Pour montrer l'identité des opérateurs $T(t, -\mathcal{M})$ et $\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})$, il reste à établir que l'élément de B défini par

$f = \mathcal{C}(t, -\mathcal{M}) f_o$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f = o \\ f\big|_{t=o} = f_o \ , \end{cases}$$

pour cela, il convient donc d'étudier la limite de $\mathcal{M}_\alpha\, f_\alpha$ quand α tend vers l'infini, et c'est pourquoi nous allons utiliser les résultats précédents dans $\mathcal{B}_r(B)$

Lemme IV.4.3

Si f_o est élément de $\mathcal{D}_r^k(B)$, $\mathcal{M}_\alpha\, T(t, -\mathcal{M}_\alpha) f_o$ converge dans $\mathcal{B}_{r-1-\mu}^{k-1}(B)$ vers $\mathcal{M}\, \mathcal{C}(t, -\mathcal{M})\, f_o$ uniformément en t quand α tend vers l'infini ($\mu = \mathrm{Sup}(1, \lambda)$).

La démonstration de la proposition IV.3.1 est entièrement valable, la convergence uniforme en t a lieu maintenant partout.

Nous pouvons énoncer comme au théorème IV.3.1 :

Proposition IV.4.2

Si $f_o(x, \vec{\xi})$ appartient à $\mathcal{D}^k_r(B)$, l'opérateur $\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})$ défini par $\mathcal{C}(t, -\mathcal{M}) = \lim_{\alpha\to\infty} T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$ est tel que, pour $k \geq 1$, $r \geq 1 + \mu$, l'élément $f(x, \vec{\xi}, t)$ défini par :

$f(x, \vec{\xi}, t) = \mathcal{C}(t, -\mathcal{M})\, f_o$, vérifie dans $\mathcal{B}^{k-1}_{r-\mu-1}(B)$, pour $r \geq 1 + \mu$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M} f = o \\ f(x, \vec{\xi}, o) = f_o(x, \vec{\xi}) \end{cases}$$

D'après la théorie des semi groupes, le système précédent n'a de solution dans $L^2(R)$ que la solution : $f(x,\vec{\xi},t) = T(t, -\mathcal{M})f_o$, où $T(t, -\mathcal{M})$ est le semi groupe engendré par $-\mathcal{M}$, dans $L^2(R)$.

Etant donné que B est inclus dans $\mathcal{B}_r(B)$ et $\mathcal{B}^k_r(B)$, on en déduit que la solution du problème aux valeurs initiales n'a que la solution $f(x, \vec{\xi}, t) = T(t, -\mathcal{M})\, f_o$ dans ces espaces pourvu que f_o appartienne à $\mathcal{D}^k_r(B)$, $k \geq 1$, c'est à dire :

Proposition IV.4.3

Pour tout f_o élément de $\mathcal{D}^k_\rho(B)$, $k \geq 1$, $\rho \geq 1 + \mu$, $T(t, -\mathcal{M})\, f_o = \mathcal{C}(t, -\mathcal{M})\, f_o$, l'égalité ayant lieu pour les normes de $L^2(R)$, $L^2(R) \cap L^\infty(R)$, $\mathcal{B}_r(B)$, et

$$\left[\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})\, f_o\right]_B \leq \exp(-\nu(\vec{\xi})t)\, [f_o]_B$$

Nous allons en déduire des majorations de $T(t, -\mathcal{M}+A)f_o$, utilisant cette inéquation, et qui ne seront donc valables que pour f_o élément de $\mathcal{D}^k_\rho(B)$, $k \geq 1$, $\rho \geq 1 + \mu$.

Entre $T(t, -\mathcal{M}_\alpha + A)$ et $T(t, -\mathcal{M}_\alpha)$, nous avons vu l'inéquation :

$$\left[T(t, -\mathcal{M}_\alpha+A)f_o\right]_{L^2(R)} \leq \left[T(t,-\mathcal{M}_\alpha)f_o\right]_{L^2(R)} + \int_o^t \left[T(t-\tau),-\mathcal{M}_\alpha+A)AT(\tau,-\mathcal{M}_\alpha+A)f_o\right]_{L^2(R)}^{d\tau}$$

Passons à la limite, en tenant compte que, pour f_o dans $\mathcal{D}_\rho^{\,k}(B)$, $\rho \geq 1+\mu$, $k \geq 1$, $\left[\mathcal{C}(t, -\mathcal{M})f_o\right]_B \leq \exp(-\nu(\vec{\xi})t)\ \left[f_o\right]_B$:

$$\left[T(t,-\mathcal{M}+A)f_o\right]_B \leq \exp(-\nu(\vec{\xi})t)\ \left[f_o\right]_B + \int_o^t \exp\{-\nu(\vec{\xi})(t-\tau)\}\left[AT(\tau,-\mathcal{M}+A)f_o\right]_B^{d\tau},$$

d'où

$$\langle T(t,-\mathcal{M}+A)f_o\rangle_{\mathcal{B}_r} \leq \exp(-\nu(o)t)\ \langle f_o\rangle_{\mathcal{B}_r} + \int_o^t \exp(-\nu(o)(t-\tau))k_r\langle T(\tau,-\mathcal{M}+A)f_o\rangle_{\mathcal{B}_{r-1}}\,d\tau$$

Iterons cette inégalité en r, jusqu'au rang $r=o$ si r est entier.

La forme générale de l'itération est :

$$(8)\quad \langle T(t,-\mathcal{M}+A)f_o\rangle_{\mathcal{B}_r} \leq \exp(-\nu(o)t)\{\langle f_o\rangle_{\mathcal{B}_r} + k_r t\,\langle f_o\rangle_{\mathcal{B}_{r-1}} + k_r k_{r-1}\frac{t^2}{2!}\langle f_o\rangle_{\mathcal{B}_{r-2}} + \cdots$$
$$+ k_r k_{r-1}\cdots k_{r-i+1}\left[\frac{t^i}{i!}\langle f_o\rangle_{\mathcal{B}_{r-i}} + k_{r-i}\int_o^t d\tau_1\int_o^{\tau_1} d\tau_2\cdots\int_o^{\tau_i} d\tau_{i+1}\right.$$
$$\left.\exp(\nu(o)\tau_{i+1})\langle T(\tau_{i+1}, -\mathcal{M}+A)f_o\rangle_{\mathcal{B}_{r-i-1}}\right.$$

Dans le cas où r est entier, on utilisera au rang zéro la majoration :

$$\langle A\,T(t, -\mathcal{M}+A)f_o\rangle_{\mathcal{B}_o} \leq k_o\ \|\ \left[T(t, -\mathcal{M}+A)f_o\right]_B\ \|_H$$

• Rappelons que pour $B = L^2(R)$, il a été démontré au chapitre III que l'opérateur $T(t, -\mathcal{M}+A)$ est de contraction dans $L^2(R, H)$:

$$\|\ \left[T(t, -\mathcal{M}+A)f_o\right]_{L^2(R)}\ \|_H \leq |||f_o|||_{L^2(R,H)}$$

Comme $\|f\|_H \leq \Pi\ \langle f\rangle_{\mathcal{B}_2}$, dans le cas où $r \geq 2$, on a :

$$(9)\quad \langle T(t,-\mathcal{M}+A)f_o\rangle_{\mathcal{B}_r(L^2(R))} \leq e^{-\nu_o t}\{1+k_r t+k_r k_{r-1}\frac{t^2}{2!} + \cdots + k_r k_{r-1}\cdots k_1 k_o\ \Pi\ \frac{t^{r+1}}{(r+1)!}\}$$

• Pour B défférent de $L^2(R)$: $B = L^2(R) \cap L^\infty(R)$, la contraction de $T(t, -\mathcal{M}+A)$ utilisée précédemment n'est plus applicable, et les majorations donnent alors :

$<A\ T(t, -\mathcal{M} + A)f_o>_{\mathcal{B}_o(B)} \leq \Pi\, k_o \exp\{(-\nu(o) + k_o)t\} <f_o>_{\mathcal{B}_2(B)}$,

en effet, le semi groupe $T(t, -\mathcal{M} + A)$ borné par $\exp\{(-\nu(o)+k_o)t\}$ dans $L^2(R,H)$ est un opérateur ayant la même borne dans $L^2(R,H) \cap H(L^\infty(R))$, où $H(L^\infty(R))$ est l'espace des fonctions dont la norme dans $L^\infty(R)$ appartient à l'espace H . Cette propriété peut être établie suivant la méthode utilisée au Lemme IV.1.2, pour $r \geq 2$, on a donc :

$$(10)\quad <T(t, -\mathcal{M} + A)f_o>_{\mathcal{B}_r(B)} \leq e^{-\nu(o)t}\left(1 + k_r t + \ldots + k_r k_{r-1} \ldots k_1 k_o \Pi \frac{e^{k_o t}}{k_o^r}\right)$$

La comparaison entre les majorations (9) et (10) dans $\mathcal{B}_r(L^2(R))$ et $\mathcal{B}_r(B)$ conduit aux remarques suivantes :

Pour $r \geq 2$:

Dans $\mathcal{B}_r L^2(R)$, la solution $T(t, -\mathcal{M} + A)f_o$ du problème posé tend vers zéro dans $\mathcal{B}_r L^2(R)$ quand t tend vers l'infini, la décroissance vers zéro est exponentielle.

Dans $\mathcal{B}_r(L^2(R) \cap L^\infty(R))$, le comportement de $T(t, -\mathcal{M} + A)f_o$ en norme dans $\mathcal{B}_r$, est exponentiel quand t tend vers l'infini , et équivalent à $K \exp(-\nu(o) + k_o)t$, ce qui est, malgré tout, un réel progrès par rapport à la majoration donnée au paragraphe 1.

PROBLEME NON LINEAIRE, NON STATIONNAIRE, SUR LA DROITE, DANS L'ESPACE $\mathcal{B}_r(L^2(R) \cap L^\infty(R))$

Etudions l'existence de la solution du problème à valeur initiale, pour l'équation de Boltzmann non linéaire :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{M}f - Af = J(f,f) & t > o \ , \\ f(x,\vec{\xi},t)\Big|_{t=o} = f_o(x,\vec{\xi}) \ . \end{cases}$$

Cette étude sera faite sur un intervalle de temps (O,T) borné, et la valeur initiale $f_o(x,\vec{\xi})$ devra, comme on le verra, être choisie en tenant compte de l'amplitude T de l'intervalle sur lequel on désire résoudre le problème.

Le terme $J(f,f)$ est le terme quadratique, étudié par Grad [22]. Le résultat de l'étude de Grad est le suivant : notons $\Gamma(f,g)$ la fonction de $\vec{\xi}$ définie par :

$$J(f,g) = \nu(\vec{\xi}) \ \Gamma(f,g).$$

vérifie pour $r \geq 1$, la majoration suivante :

$$\underset{\vec{\xi}\in R^3}{\text{Max}} \ (1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2} \ |\Gamma(f,g)| \leq \gamma_o \underset{\vec{\xi}\in R^3}{\text{Max}} \ (1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2} \ |f| \underset{\vec{\xi}\in R^3}{\text{Max}} \ (1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2} \ |g|$$

et pour $r > 1$

$$\underset{\vec{\xi}}{\text{Max}} \ (1+|\vec{\xi}|^2)^{1/2} \left| \int |\Gamma(f,g)|^2 dx \right|^{1/2} \leq \gamma_o \underset{x,\vec{\xi}}{\text{Max}} \ (1+|\vec{\xi}|^2)^{1/2} |f| \ \underset{\vec{\xi}}{\text{Max}} (1+|\vec{\xi}|^2)^{1/2} \left(\int g^2 dx \right)^{1/2}$$

Dans un premier temps, au lieu du problème (I), nous allons nous intéresser à l'équation (II) suivante, forme intégrale du problème (I).

$$(II) \quad f(x,\vec{\xi},t) = T(t,-\mathcal{M}+A) f_o(x,\vec{\xi}) + \int_o^t T(t-\tau, -\mathcal{M}+A) \nu(\vec{\xi}) \Gamma(f(x,\vec{\xi},\tau), f(x,\vec{\xi},\tau)) d\tau$$

où l'opérateur $T(t, -\mathcal{M} + A)$ est celui que nous avons défini au chapitre IV. En effet, pour établir l'existence d'une solution de l'équation II, nous allons procéder par itération, et les majorations

précédentes concernant $\Gamma(f,g)$ nous indiquent qu'il faut faire l'étude dans un espace d'indice r.

L'espace B qui, au chapitre IV, dénotait indifféremment $L^2(R)$ ou $L^2(R) \cap L^\infty(R)$, sera ici l'espace $L^2(R) \cap L^\infty(R)$ uniquement.

La présence du terme $\nu(\vec{\xi})$ dans le terme quadratique nous obligera à intégrer par rapport à t avant de prendre le maximum en $\vec{\xi}$ du terme $\int_0^t T(t-\tau, -\mathcal{M} + A)\nu(\vec{\xi})\Gamma(f(\tau), f(\tau))\, d\tau$,

ceci nous permettra, tenant compte de la majoration de $T(t, -\mathcal{M})$ dans l'espace B, de faire apparaître, par intégration en t , un coefficient $\frac{1}{\nu(\vec{\xi})}$, et, ainsi, nous pourrons procéder à une itération dans un espace de même indice. C'est pourquoi nous introduisons les espaces suivants, où nous prendrons le maximum en t , ou la norme dans $L^\infty(0,T)$ pour la variable t , avant de prendre la norme dans $\mathcal{B}_r$:

Définissons les espaces $\mathbb{B}^1_{r,T}$ et $\mathbb{B}^\infty_{r,T}$, espaces des fonctions où les expressions suivantes sont finies, et seront prises pour normes :

$$\ll f \gg_{\mathbb{B}^1_{r,T}} = \operatorname*{Max}_{\vec{\xi} \in R^3} (1 + |\vec{\xi}|^2)^{r/2} \int_0^T [f(t)]_B \, dt ,$$

$$\ll f \gg_{\mathbb{B}^\infty_{r,T}} = \operatorname*{Max}_{\vec{\xi} \in R^3} (1 + |\vec{\xi}|)^{r/2} \operatorname*{Max}_{t \in (0,T)} [f(t)]_B ,$$

enfin, notons $\mathbb{B}_{r,T}$ l'espace où la norme de f est :

$$<<f>>_{r,T} = \max (\ll f \gg_{r,T}, \ll f \gg_{r,T})$$

Afin d'obtenir pour l'opérateur $T(t, -\mathcal{M} + A)$ des majorations adaptées au problème, c'est-à-dire dans l'espace $\mathbb{B}_{r,T}$, nous allons reprendre les majorations du chapitre IV.

1 - Majorations de $T(t, -\mathcal{M} + A)f_o$ dans l'espace $\mathcal{B}_{r,T}$, pour f_o élément de $\mathcal{D}_p^k(B)$, $k \geqslant 1$ $p \geqslant 1+\mu$

Au chapitre IV paragraphe 4, l'inéquation (6) obtenue est :

$$(1) \quad \left[T(t,-\mathcal{M}+A)f_o\right]_B \leqslant \exp(-\nu(\vec{\xi})t)\left[f_o\right]_B + \int_o^t \exp\left[-\nu(\vec{\xi})(t-\tau)\right]\left[AT(\tau,-\mathcal{M}+A)f_o\right]_B d\tau$$

Par intégration par rapport à t sur l'intervalle (o,T), nous obtenons une majoration de $T(t, -\mathcal{M}+ A)f_o$ dans l'espace $\mathcal{B}^1_{r,T}$:

$$\int_o^T \left[T(t,-\mathcal{M}+A)\right]_B dt \leqslant \frac{1}{\nu(\vec{\xi})}\left[f_o\right]_B + \frac{1}{\nu(\vec{\xi})}\,|A|\left(\int_o^T \left[T(t,-\mathcal{M}+A)f_o\right]_B dt\right)$$

où $|A|$ désigne l'opérateur intégral en $\vec{\xi}$ dont le noyau est le module du noyeu de A. Pour majorer $\int_o^T dt \int_o^t \exp(-\nu(\vec{\xi})(t-\tau))\left[AT(\tau)f_o\right]_B d\tau$ nous avons utilisé la forme de produit de convolution de l'expression à intégrer, et :

$$|f * g|_{L^1(o,T)} \leqslant |f|_{L^1(o,T)} \; |g|_{L^1(o,T)}$$

Nous en déduisons :

$$(2) \quad \langle\!\langle T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \rangle\!\rangle_{r,T} \leqslant \left\langle \frac{f_o}{\nu(\vec{\xi})} \right\rangle_{\mathcal{B}_r} + \frac{k_{r-1}}{\nu(o)} \langle\!\langle T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \rangle\!\rangle_{r-1,T}$$

ceci en supposant seulement que $\nu(\vec{\xi})$ est borné inférieurement par $\nu(o)$, et sans employer son comportement pour $|\vec{\xi}|$ infini.

La majoration dans $\mathcal{B}^\infty_{r,T}$ donne :

$$\operatorname*{Max}_{t\in(o,T)} \left[T(t,-\mathcal{M}+A)f_o\right]_B \leqslant \left[f_o\right]_B + \frac{1}{\nu(\vec{\xi})}\,|A| \left(\operatorname*{Max}_{t\in(o,T)} \left[T(t,-\mathcal{M}+A)f_o\right]_B\right)$$

en utilisant ici :

$$|f * g|_{L^\infty(o,T)} \leqslant |f|_{L^\infty(o,T)} \; |g|_{L^1(o,T)}$$

soit :

$$(3) \quad \langle\!\langle T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \rangle\!\rangle_{r,T} \leqslant \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r} + \frac{k_{r-1}}{\nu(o)} \langle\!\langle T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \rangle\!\rangle_{r-1,T}$$

L'utilisation du comportement en $(1 + |\vec{\xi}|^2)^{1/2}$ pour $|\vec{\xi}|$ infini de $\nu(\vec{\xi})$ permet d'abaisser l'indice de $\langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_{r-1}}$ pour $\mathcal{B}^1_{r,T}$,

mais est sans effet pour la majoration dans $\mathcal{B}^{\infty}_{r,T}$.

Nous pouvons énoncer :

Lemme V .1.1

Pourvu que $f_o(x,\vec{\xi})$ appartienne à $\mathcal{D}^k_\rho$, $k \geqslant 1$ $\rho \geqslant 1 + \mu$, $T(t, -\mathcal{M} + A)f_o(x, \vec{\xi})$ admet dans $\mathcal{B}^1_{r,T}$ et $\mathcal{B}_{r,T}$ les majorations suivantes :

$$\ll T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \gg_{r,T} \leqslant \frac{f_o}{\nu(\vec{\xi})}\mathcal{B}_r + \frac{k_{r-1}}{\nu(o)} \ll T(t, -\mathcal{M} + A)f_o \gg_{r-1,T}$$

$$\ll\ll T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \gg\gg_{r,T} \leqslant \frac{1}{\nu(o)^*} \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r} + \frac{k_{r-1}}{\nu(o)} \ll\ll T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \gg\gg_{r-1,T}.$$

où $\nu(o)^* = \inf(1, \nu(o))$.

Nous allons pouvoir en déduire une majoration de $T(t,-\mathcal{M}+A)f_o$ dans $\mathcal{B}_{r,T}$ et $\mathcal{B}^1_{r,T}$ ne dépendant que de l'indice r , de T, et de $\langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r}$, ceci en itérant la formule précédente, jusqu'à l'indice zéro pour r entier, ce que nous pouvons supposer sans restreindre la généralité (il suffirait de considérer l'indice r entier immédiatement supérieur).

Pour $r = o$, nous utiliserons la majoration de terme du paragraphe 1, chapitre IV :

$$\langle T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \rangle_{\mathcal{B}_o} < \exp(k_o\, t) \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_o} , \quad \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_o} < \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r}$$

$$\ll T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \gg_{o,T} \leqslant \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_o} \exp(k_o T)\ \mathrm{Sup.}(1, \frac{1}{k_o}) ,$$

soit :

$$\ll T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \gg_{r,T} \leqslant \frac{1}{\nu(o)^*} \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r} + \frac{k_{r-1}}{\nu(o)\nu(o)^*} \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_{r-1}} + \frac{k_{r-1}k_{r-2}}{\nu(o)^2}$$

$$\ll T(t,-\mathcal{M}+A)f_o \gg_{r-2.T}$$

$$\leqslant P_r \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r} + K_r\, e^{k_o T} \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_o}$$

$$\leqslant \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r} (P_r + K_r\, e^{k_o T}) \quad \text{où}$$

P_r et K_r ne dépendent que de l'indice r , et de la nature de la collision par l'intermédiaire de k_i , $i < r$, et de $\nu(\vec{\xi})$:

$$P_r = \frac{1}{\nu(o)^*} \left[1 + \frac{k_{r-1}}{\nu(o)} + \frac{k_{r-1}k_{r-2}}{\nu(o)^2} + \dots + \frac{k_{r-1}\cdots k_1}{\nu(o)^{r-1}} \right]$$

$$K_r = \frac{k_{r-1}\cdots k_1 k_o}{\nu(o)^r} \sup.(1, \frac{1}{k_o})$$

La majoration obtenue dans $\mathcal{B}_{r,T}$ a l'avantage d'être exponentielle en T de la forme $e^{k_o T}$, au lieu de $e^{k_r T}$, car comme on le sait, $k_r > k_o$.

Nous énoncerons :

Lemme V .1.2

Pourvu que $f_o(x,\vec{\xi})$ appartienne à $\mathcal{D}^k_\rho(\mathcal{M})$, $k \geqslant 1$, $\rho \geqslant 1 + \mu$, on a :

$$\ll T(t,-\mathcal{M}+A) f_o \gg_{r,T} \leqslant (P_r + K_r e^{k_o T}) < \frac{f_o}{\nu(\vec{\xi})} > \mathcal{B}_r$$

$$\ll T(t,-\mathcal{M}+A) f_o \gg_{r,T} \leqslant (P_r + K_r e^{k_o T}) < f_o > \mathcal{B}_r .$$

Déduisons maintenant des majorations de Grad que nous avons rappelées, des majorations du terme quadratique $\Gamma(h,g)$ adaptés au problème, c'est-à-dire dans $\mathcal{B}_{r,T}$:

Lemme V .1.3

Pour $r > 1$, il existe une constante γ_o telle que l'on ait :

$$\ll \Gamma(h,g) \gg_{r,T} \leqslant \gamma_o \ll h \gg_{r,T} \ll g \gg_{r,T}$$

Reprenons l'expression de $\nu(\vec{\xi})\ \Gamma(h,g)$ avec les notations de grad, ainsi que la démonstration [21]

$$\nu(\vec{\xi})\ \Gamma(h,g) = \frac{1}{2} \int (h'\ g'_1 + h'_1\ g' - h\ g_1 - h_1\ g)\ \omega^{1/2}\ d\Omega,$$

$$|\nu(\vec{\xi})\ \Gamma(h,g)| \leqslant \nu(\vec{\xi})\{\Gamma_1(h,g) + \Gamma_2(h,g)\}\ ,\ \text{où}$$

$$\nu(\vec{\xi})\ \Gamma_1(h,g) = \frac{1}{2} \int |h\ g_1 + h_1\ g|\ \omega^{1/2}\ d\Omega\ ,$$

$$\nu(\vec{\xi})\ \Gamma_2(h,g) = \frac{1}{2} \int |h'\ g'_1 + h'_1\ g'|\ \omega^{1/2}\ d\Omega\ .$$

Nous noterons :

$$\gamma(h,g) = \Gamma_1(h,g) + \Gamma_2(h,g)\ ,\ \text{et}$$

$$|\nu(\vec{\xi})\ \gamma(h,g)| \leqslant \nu(\vec{\xi})\ \gamma(|h|, |g|)\ ,$$

ce qui permet de déduire les majorations suivantes :

$$\nu(\vec{\xi})\ ||\Gamma(h,g)||_{L^2(R)} \leqslant \nu(\vec{\xi})\ ||\gamma(|h|,\ |g|)||_{L^2(R)}$$

$$\leqslant \nu(\vec{\xi})\ \ \gamma(\max_x |h|,\ ||g||_{L^2(R)})\ ,$$

il suffit en effet d'établir que, de manière générale

$$\left[\int dx\left(\int \phi(x,\vec{u})\ \psi(x,\vec{u})d\vec{u}\right)^2\right]^{1/2} \leqslant \int du \max_x |\phi(x,\vec{u})|\ ||\ (x,\vec{u})||_{L^2(R)}$$

de la manière suivante :

$$\int dx\left(\int \phi(x,\vec{u})\psi(x,\vec{u})du\right)^2 \leqslant \int dx \int d\vec{u}_1\ \phi(x,\vec{u}_1)\psi(x,\vec{u}_1) \int d\vec{u}_2\ \phi(x,\vec{u}_2)\psi(x,\vec{u}_2)$$

$$\leqslant \int d\vec{u}_1 d\vec{u}_2 \max_x|\phi(x,\vec{u}_1)|\max_x|\phi(x,\vec{u}_2)|\int dx\ \psi(x,u_2)\psi(x,u_2)$$

$$\leqslant \int d\vec{u}_1 d\vec{u}_2 \max_x|\phi(x,u_1)|\max_x|\phi(x,u_2)|\,||\psi(x,u_1)||_{L^2(R)}$$

$$||\psi(x,u_2)||_{L^2(R)}$$

$$\leqslant \left(\int d\vec{u}_1 \max_x|\phi(x,\vec{u}_1)|\,|||\psi(x,\vec{u}_1)|||_{L^2(R)}\right)^2$$

En outre :

$$\nu(\vec{\xi}) \operatorname*{Max}_x |\ \Gamma(h,g)\ | \leqslant \nu(\vec{\xi})\ \ \gamma(\max_x |h|,\ \max_x |g|)\ ,$$

soit :

$$[\ \Gamma(h,g)\ ]_B \leqslant \gamma([h]_B\ ,\ [g]_B)\ .$$

Procédons maintenant à la majoration au cours du temps :

$$\max_{t\in[o,T]} [\Gamma(h,g)]_B \leqslant \gamma(\max_{t\in(o,T)} [h]_B\ ,\ \max_{t\in(o,T)} [g]_B)$$

$\int_o^T [\Gamma(h,g)]_B\ dt \leqslant \int_o^T \gamma([h]_B\ ,\ [g]_B)\ dt$, et un calcul simple montre

que $\leqslant \gamma(\max_{t\in(o,T)} [h]_B\ ,\ \int_o^T [g]_B\ dt)$, soit

en utilisant le résultat de Ⓖrad, selon lequel il existe une

constante γ_o telle que, pour $r > 1$:

$$\max_{\vec{\xi}\in R^3} (1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}|\ \gamma(\psi,\phi)| \leqslant \gamma_o \max_{\vec{\xi}\in R^3} (1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}|\psi| \max_{\vec{\xi}\in R^3} (1+|\vec{\xi}|^2)^{r/2}|\phi|$$

$$<< \Gamma(h,g) >>_{r,T} \leqslant \gamma_o << h >>_{r,T} << g >>_{r,T}\ .$$

2 - Etude dans $\mathcal{B}_{r,T}$ de $\Phi(h,g) = \int_o^t T(t-\tau, -\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\Gamma(h,g)(\tau)d\tau$.

L'étude de $\Phi(h,g)$ dans $\mathcal{B}_{r,T}$ sera utile à la fois pour déterminer si l'itération que nous allons faire pour résoudre le problème intégral II a un sens, et pour déterminer dans quels cas cette itération sera convergente.

Pour cela, nous avons besoin des majorations précédentes dans $\mathcal{B}_{r,T}$, et, si h et g sont dans $\mathcal{B}_{r,T}$, il en est de même de $\Gamma(h,g)(\tau)$, mais $\nu(\vec{\xi})\ \Gamma(h,g)\tau$ se trouve appartenir à $\mathcal{B}_{r-1,T}$.

C'est alors que, par une intégration en t de la norme de $T(t-\tau, -\mathcal{M}+A)$ dans B, c'est-à-dire avant de prendre le maximum pour la variable $\vec{\xi}$, nous ferons apparaître un coefficient $\frac{1}{\nu(\vec{\xi})}$ ce qui nous permettra de rester au cours de l'application de $h,g \longrightarrow \Phi(h,g)$, dans l'espace $\mathcal{B}_{r,T}$, et c'est pourquoi nous avons défini ces nouveaux espaces.

Pourvu que $\nu(\vec{\xi})\ \Gamma(h,g)$ appartienne au domaine de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}_\rho^k$, si $\rho \geq 1+\mu$, $k \geq 1$:

$$\left[T(t-\tau,-\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\Gamma(h(\tau),g(\tau))\right]_B \leq \exp\left[-\nu(\vec{\xi})(t-\tau)\right]\nu(\vec{\xi})\left[\Gamma(h(\tau),g(\tau))\right]_B + \int_o^{t-\tau} du\ \exp\left[-\nu(\vec{\xi})(t-\tau-u)\right]\ \left[A\ T(u,-\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\ \Gamma(h(\tau),g(\tau))\right]_B$$

Nous obtiendrons une majoration de $\Phi(h,g)$ dans $\mathcal{B}_{r,T}$, dans le cas où h et g appartiennent pour tout $\vec{\xi}$ et t au domaine de $\mathcal{M}$ dans B, en majorant les deux termes précédents, intégrés entre o et t. Posons :

$$\left[\alpha\right]_B = \int_o^t \exp\{-\nu(\vec{\xi})(t-\tau)\}\ \nu(\vec{\xi})\ \left[\Gamma(h(\tau),\ g(\tau))\right]_B d\tau\ ,\ \text{et}$$

$$\left[\beta\right]_B = \int_o^t d\tau \int_o^{t-\tau} du\ \exp\{-\nu(\vec{\xi})(t-\tau-u)\}\ \left[A\ T(u,-\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\Gamma(h(\tau),\ g(\tau))\right]_B$$

Lemme V .2.1 pour $r > 1$:

$\ll\alpha\gg_{r,T} \leq \gamma_o \ll h\gg_{r,T} \ll g\gg_{r,T}$, où $\left[\alpha\right]_B$ est défini par :

$$\left[\alpha\right]_B = \int_o^t \exp\{-\nu(\vec{\xi})(t-\tau)\}\ \nu(\vec{\xi})\ \left[\Gamma(h(\tau),\ g(\tau))\right]_B d\tau\ .$$

Dans l'expression de $[\alpha]_B$, on reconnait le produit de convolution pour la variable t de $\exp(-\nu(\vec{\xi})\, t)$ et de $[\nu(\vec{\xi})\, \Gamma(h(\tau), g(\tau))]_B$, d'où l'on déduit :

$$\max_{t\in[o,T]} [\alpha]_B \leqslant \max_{t\in(o,T)} [\Gamma(h(t),g(t))]_B \; \nu(\vec{\xi}).\frac{1}{\nu(\vec{\xi})}\{1-\exp(-\nu(\vec{\xi})T)\}$$

$$\leqslant \max_{t\in(o,T)} [\Gamma(h(t),g(t))]_B$$

$$\int_o^T [\alpha(t)]_B\, dt \leqslant \int_o^T [\Gamma(h(t),g(t))]_B\, dt.\; \nu(\vec{\xi}).\frac{1}{\nu(\vec{\xi})}\{1-\exp(-\nu(\vec{\xi})T)\}$$

$$\leqslant \int_o^T [\Gamma(h(t),g(t))]_B\, dt$$

$$\max_{\vec{\xi}\in R^3} (1+|\vec{\xi}|^2)^{1/2}\, \mathrm{Sup}\Big(\max_{t\in o,T} [\alpha]_B\,,\; \int_o^T [\alpha(t)]_B\, dt\Big)$$

$$\leqslant \max_{\vec{\xi}\in R^3} (1+|\vec{\xi}|^2)^{1/2}\, \sup\Big\{\max_{t\in o,T} [\Gamma(h(t),g(t)]_B, \int_o^T [\Gamma(h(t),g(t)]_B t\Big\}$$

$$\leqslant \; \langle\langle \Gamma(h(t),\, g(t))\rangle\rangle_{r,T}$$

et il suffit d'appliquer le lemme V .1.3.

Lemme V .2.2

Pourvu que $\nu(\vec{\xi})\, \Gamma(h,g)$ appartienne à $\mathfrak{D}^k_\rho(\mathcal{M})$, $k \geqslant 1$, $\rho \geqslant 1+\mu$, on a, pour $r \geqslant 2$

$$\langle\langle\beta\rangle\rangle_{r,T} \leqslant \langle\langle g\rangle\rangle_{r-1,T}\, \langle\langle h\rangle\rangle_{r-1,T}\; \gamma_o\, k_r\Big[P_{r-1}\mathrm{Sup}(1,T)+K_{r-1}e^{k_o T}\mathrm{Sup}\Big(1,\frac{1}{k_o}\Big)\Big]$$

Nous avons en effet :

$$\langle\beta\rangle_r \leqslant k_r \int_o^t d\tau \int_o^{t-\tau} du\, \langle T(u,-\mathcal{M}+A)\, \nu(\vec{\xi})\, \Gamma(h(\tau),\, g(\tau))\rangle_{\mathcal{B}_{r-1}},$$

ceci d'après la majoration de l'opérateur A, de $\mathcal{B}_{r-1}$ dans $\mathcal{B}_r$.

On reconnait l'expression :

$$\langle\beta\rangle_r \leqslant k_r \int_o^t d\tau\; \langle\langle T(u,-\mathcal{M}+A)\, \nu(\vec{\xi})\, \Gamma(h(\tau),\, g(\tau))\rangle\rangle_{r-1,t-\tau}$$

Pour laquelle nous pouvons utiliser la majoration du lemme V .1.2 :

$$\langle\langle T(u,-\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\Gamma(h(\tau),g(\tau))\rangle\rangle_{r-1,t-\tau} \leqslant \langle\Gamma(h(\tau),g(\tau))\rangle_{\mathcal{B}_{r-1}}(P_{r-1}+K_{r-1}$$

pourvu que $\nu(\xi)\, \Gamma(h,g)(\tau)$ appartienne à $\mathfrak{D}^k_\rho$, pour tout τ, $k \geqslant 1$, $\rho \geqslant 1+\mu$,

$$<\beta>_{\mathcal{B}_r} \leq k_r \int_o^t <\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{\mathcal{B}_{r-1}} (P_{r-1} + K_{r-1}\, e^{k_o(t-\tau)})d\tau$$

Il nous suffit alors de prendre le maximum de cette expression sur o,T :

$$\underset{t\in(o,T)}{\text{Max}} <\beta>_{\mathcal{B}_r} \leq k_r \underset{t\in o,T}{\text{Max}} \int_o^t <\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{\mathcal{B}_{r-1}} (P_{r-1} + K_{r-1}\, e^{k_o(t-\tau)})\, d\tau$$

$$\leq k_r \underset{t\in o,T}{\text{Max}} \{ \underset{\tau\in(o,T)}{\text{Max}} (P_{r-1}+K_{r-1}e^{k_o(t-\tau)}) \int_o^t <\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{\mathcal{B}_{r-1}} d\tau$$

$$\leq k_r \, \nearrow\!\!<\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{r-1,T} (P_{r-1} + K_{r-1}\, e^{k_o T})$$

$$\int_o^T <\beta(t)>_{\mathcal{B}_r} d\tau \leq k_r \int_o^T dt \int_o^t <\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{\mathcal{B}_{r-1}} (P_{r-1} + K_{r-1}\, e^{k_o(t-\tau)})\, d\tau$$

$$\leq k_r \int_o^T dt \{ \underset{\tau\in o,t}{\text{Max}} (P_{r-1}+ K_{r-1}\, e^{k_o(t-\tau)}) \int_o^t <\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{\mathcal{B}_{r-1}} d\tau$$

$$\leq k_r \int_o^T dt\, (P_{r-1}+ K_{r-1}\, e^{k_o t}) . \underset{t\in o,T}{\text{Max}} \int_o^t <\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{\mathcal{B}_{r-1}} d\tau$$

$$\leq k_r \, \nearrow\!\!<\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{r-1,T} \{P_{r-1}T + \frac{K_{r-1}}{k_o}(e^{k_o T}-1)\}$$

Supposons $r-1 \geq 1$: on en déduit alors :

$$<<\beta>>_{r,T} \leq <<h>>_{r-1,T} <<g>>_{r-1,T} \; \gamma_o\, k_r \left[P_{r-1}\, \text{Sup}(1,T) + K_{r-1}\, e^{k_o T} \text{Sup}(1,\tfrac{1}{k_o})\right]$$

Pour $r \geq 1$, il suffit de majorer $\nearrow\!\!<\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{r-1}$ par $\nearrow\!\!<\Gamma(h(\tau),g(\tau))>_{r}$

On peut donc conclure :

Proposition V .2.1

Pourvu que $h(x,\vec{\xi},t)$ et $g(x,\vec{\xi},t)$ appartiennent à $\mathcal{D}_\rho^k(\mathcal{M})$ $k \geq 1$, $\rho \geq 1+\mu$, on a pour $r > 1$

$$<<\Phi(h,g)>>_{r,T} \leq <<h>>_{r,T} <<g>>_{r,T} \; \phi_r(T)$$

où $\phi_r(T) = \gamma_o \left[1 + k_r(P_{r-1}\, \text{Sup}(1,T) + K_{r-1}\, e^{k_o T}\, \text{Sup.}(1, \frac{1}{k_o})\right]$

Le problème est maintenant de savoir si $\Phi(h,g)$ a les mêmes propriétés que h et g, ce qui montrera alors que l'itération aura bien un sens :

Si h et g appartiennent, ainsi que leurs deux premières dérivées par rapport à x à $\mathcal{B}_r$, $r \geq 1+3\mu$, $\nu(\xi)\,\Gamma(h,g)$ est bien élément de $\mathcal{D}_\rho^k$, $k \geq 1$, $\rho \geq 1+\mu$.

D'après les propriétés démontrées au chapitre IV sur les dérivées par rapport à x de $T(t,-\mathcal{M}+A)f_o$, on en déduit:

$\phi(h,g)$ ainsi que sa dérivée première par rapport à x appartient à $\mathcal{B}_r$, $r \geqslant 1 + 3\mu$.

Cette remarque va nous amener à faire une hypothèse sur $f_o(x,\vec{\xi})$ pour que le processus d'itération ait un sens.

Pour simplifier les notations, nous supposerons maintenant que $\lambda = 1$, soit $\mu = 1$.

3 - Résolution de l'équation intégrale II par itération

Supposons que r est un réel entier supérieur à 1 , et que $f_o(x,\vec{\xi})$ est indéfiniment dérivable par rapport à la variable x, et qu'il appartient ainsi que toutes ses dérivées, au domaine de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}_\alpha$, de telle sorte que $\nu(\vec{\xi})\,\Gamma(f_n, f_n)$ appartienne à $\mathcal{D}_2^\infty$, et qu'à tout rang n , l'itération suivante est possible d'après la théorie précédente :

$$f_1 = T(t, -\mathcal{M} + A)f_o$$

$$f_2 = T(t,-\mathcal{M}+A)f_o + \int_o^t T(t-\tau,-\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\Gamma(f_1(x,\vec{\xi},\tau), f_1(x,\vec{\xi},\tau))d\tau$$

$$\vdots$$

$$f_{n+1} = T(t,-\mathcal{M}+A)f_o + \int_o^t T(t-\tau,-\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\Gamma(f_n(x,\vec{\xi},\tau), f_n(x,\vec{\xi},\tau))d\tau$$

Déterminons d'abord l'indice α :

Pour que $\nu(\vec{\xi})\,\Gamma(f_n, f_n)$ appartienne à $\mathcal{D}_2^\infty$, il suffit que $\nu(\vec{\xi})\,\Gamma(f_1, f_1)$ appartienne à $\mathcal{D}_2^\infty$, c'est-à-dire que f_1 ainsi que toutes ses dérivées en x, appartiennent pour tout t à $\mathcal{B}_4$. D'après le chapitre IV, il suffit que f_o appartienne au domaine de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}_4$, ainsi que toutes ses dérivées.

Supposons donc que $f_o(x,\vec{\xi})$ est élément de $\mathcal{B}_5^\infty$, alors $\nu(\vec{\xi})\,\Gamma(f_n, f_n)$ appartient à $\mathcal{D}_2^\infty$, pour tout n.

Etudions la convergence de l'itération précédente dans $\mathcal{B}_{r,T}$, $r > 1$.

$$f_{n+1}-f_n = \int_o^t T(t-\tau,-\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\{\Gamma(f_n(\tau),f_n(\tau)) - \Gamma(f_{n-1}(\tau),f_{n-1}(\tau))\}d\tau$$

$$= \int_o^t T(t-\tau,-\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\Gamma(f_n(\tau) + f_{n-1}(\tau),\ f_n(\tau) - f_{n-1}(\tau))\ d\tau$$

ceci en utilisant le fait que $\Gamma(f,g)$ est bilinéaire symétrique en f et g.

On reconnait alors :

$f_{n+1} - f_n = \Phi(f_n + f_{n-1}\ ,\ f_n - f_{n-1})$, soit :

Lemme V .3.1

$$\left|\ \ll f_{n+1} - f_n \gg_{r,T} \leqslant \phi_r(T) \ll f_n + f_{n-1} \gg_{r,T} \ll f_n - f_{n-1} \gg_{r,T}\right.$$

Mettons cette majoration sous la forme :

$\ll f_{n+1} - f_n \gg_{r,T} \leqslant \ll f_n - f_{n-1} \gg_{r,T} \mathcal{F}(f_o, n, r, T)$, en effet, f_n dépend de la valeur initiale f_o, de l'indice n, des quantité r et T.

Le processus d'itération sera convergent dans $\mathcal{B}_{r,T}$, si il est possible de trouver f_o, r et T tels que pour tout n

$$\mathcal{F}(f_o, n, r, T) < 1$$

Il convient donc de trouver une majoration de $\ll f_n + f_{n-1} \gg_{r,T}$ en fonction de r, T et f_o, ce que nous allons faire au Lemme suivant :

Lemme V .3.2

$$\left|\ \begin{array}{l} \ll f_n \gg_{r,T} \leqslant \psi_r(T) \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r} + \phi_r(T) \ll f_{n-1}{}^2 \gg_{r,T} \\ \text{où } \psi_r(T) = P_r + K_r\, e^{k_o T} \end{array}\right.$$

$$\ll f_n + f_{n-1} \gg_{r,T} \leqslant \ll f_n \gg_{r,T} + \ll f_{n-1} \gg_{r,T}$$

Utilisons la relation entre f_n et f_{n-1} :

$$f_n = T(t,-\mathcal{M}+A)f_o + \Phi(f_{n-1}, f_{n-1}) \text{ , soit}$$

$$<<f_n>>_{r,T} \leqslant (\mathcal{P}_r + K_r e^{k_o T}) <f_o>_{\mathcal{B}_r} + \phi_r(T) <<f_{n-1}>>^2_{r,T}$$

$$<<f_n>>_{r,T} + <<f_{n-1}>>_{r,T} \leqslant 2(\mathcal{P}_r + K_r e^{k_o T}) <f_o>_{\mathcal{B}_r} + \phi_r(T)\{<<f_{n-1}>>^2_{r,T} + <<f_{n-2}>>^2_{r,T}\}$$

ceci en appliquant deux fois les lemmes V .1.2 et la proposition V .2.1

Posons $\psi_r(T) = P_r + K_r e^{k_o T}$.

Le problème peut maintenant se formuler ainsi :

1) existe-t-il un nombre A tel que si f_n appartient à la boule de rayon A dans $\mathcal{B}_{r,T}$, il en est de même de f_{n+1} ;

2) nous pourrons affirmer que le processus d'itération est convergent si $2A\,\phi_r(T)$ est majoré par 1 .

Nous avons donc à résoudre l'inéquation en A :

$$\begin{cases} \psi_r(T) <f_o>_{\mathcal{B}_r} + \phi_r(T) A^2 < A \text{ , et à réaliser} \\ 2A\,\phi_r(T) < 1 \text{ ,} \end{cases}$$

soit :

$$4\,\phi_r(T)\,\psi_r(T) <f_o>_{\mathcal{B}_r} < 1$$

et

$$2A\,\phi_r(T) < 1 \text{ ,}$$

ce qui permet d'énoncer :

Théorème V .3.1

Si f_o et ses dérivées de tous ordres en x appartiennent à $\mathcal{B}_\rho(L^2(R) \cap L^\infty(R))$, $\rho \geqslant 5$, l'équation

$$f(x,\vec{\xi},t) = T(t,-\mathcal{M}+A)f_o(x,\vec{\xi}) + \int_o^t T(t-\tau,-\mathcal{M}+A)\nu(\vec{\xi})\,\Gamma(f(x,\vec{\xi},\tau), f(x,\vec{\xi},\tau))d\tau$$

admet, pour t appartenant à l'intervalle (o,T) une solution dans $\mathcal{B}_{r,T}$, pourvu que f_o appartienne dans $\mathcal{B}_r$ à la boule définie pour chaque T par :

$4\,\phi_r(T)\,\psi_r(T)\,\langle f_o\rangle_{\mathcal{B}_r} < 1 \quad , \qquad r > 1$

La solution $f(x,\vec{\xi},t)$ ainsi trouvée vérifie :

$$\langle\langle f(x,\vec{\xi},t)\rangle\rangle_{r,T}\ 2\,\phi_r(T) < 1$$

et elle est unique dans $\mathcal{B}_{r,T}$.

L'unicité est établie par le fait que à chaque étape de l'itération, il y a unicité dans $\mathcal{B}_{r,T}$, puisque r est supposé supérieur à 2.

La majoration pour la solution $f(x,\vec{\xi},t)$ dans $\mathcal{B}_{r,T}$ résulte de $2A\,\phi_r(T) < 1$.

Etudions si la solution $f(x,\vec{\xi},t)$ ainsi obtenue est solution du problème initial.

4 - Régularité de la solution. Résolution du problème I

Etudions tout d'abord la dérivabilité de $f(x,\vec{\xi},t)$ par rapport à la variable x.

Dérivons formellement le problème I par rapport à x :

$$(I') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x} + \mathcal{M}\dfrac{\partial f}{\partial x} - A\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\,\Gamma\left(f, \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\nu(\vec{\xi}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{t=o} = \dfrac{\partial f_o}{\partial x} \end{cases}$$

Le problème intégral qui s'en déduit est le suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = T(t,-\mathcal{M}+A)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \int_o^t T(t-\tau,-\mathcal{M}+A)\,\nu(\vec{\xi})\,2\Gamma\left(f(x,\vec{\xi},\tau), \frac{\partial f}{\partial x}(x,\vec{\xi},\tau)\right) d\tau$$

Il a suffit pour cela de remarquer, comme au chapitre IV, que :

$$\frac{\partial}{\partial x}\ T(t,-\mathcal{M}+A)f_o = T(t,-\mathcal{M}+A)\,\frac{\partial f_o}{\partial x}$$

Connaissant d'après le paragraphe 3, l'existence de f solution de (II), cherchons à quelles conditions nous pouvons en déduire l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ solution de (II'), ce qui nous montrera alors, d'après le résultat d'unicité, que $f(x,\vec{\xi},t)$ est bien dérivable par rapport à x.

Nous résoudrons (II') par l'itération suivante :

$$\phi_1 = T(t,-\mathcal{M}+A)\ \phi_o$$

$$\phi_2 = T(t,-\mathcal{M}+A)\ \phi_o + 2\int_o^t T(t-\tau,-\mathcal{M}+A)\ \nu(\vec{\xi})\ \Gamma(\phi_1(\tau),\ f_1(\tau))\ d\tau$$

$$\vdots$$

$$\phi_{n+1} = T(t,-\mathcal{M}+A)\ \phi_o + 2\int_o^t T(t-\tau,-\mathcal{M}+A)\ \nu(\vec{\xi})\ \Gamma(\phi_n(\tau),\ f_n(\tau))\ d\tau$$

où $\phi_o = \dfrac{\partial f_o}{\partial x}$, $\phi_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ ..... $\phi_n = \dfrac{\partial f_n}{\partial x}$

et où f_n est la valeur trouvée au paragraphe 3 lors de l'itération pour le problème II.

Les inégalités établies au paragraphe 2 prouvent ici :

Lemme V .4.1

$$\langle\langle\phi_{n+1}\rangle\rangle_{r,T} \leq \psi_r(T) \left\langle \frac{\partial f_o}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{B}_r} + 2\ \phi_r(T)\ \langle\langle f_n\rangle\rangle_{r,T}\ \langle\langle\phi_n\rangle\rangle_{r,T}$$

Lemme V .4.2

$$\langle\langle\phi_{n+1}-\phi_n\rangle\rangle_{r,T} \leq 2\ \phi_r(T)\left(\langle\langle f_n - f_{n-1}\rangle\rangle_{r,T}\langle\langle\phi_n\rangle\rangle_{r,T} + \langle\langle\phi_n-\phi_{n-1}\rangle\rangle_{r,T}\ \langle\langle f_{n-1}\rangle\rangle_{r,T}\right)$$

Il suffit pour cela d'évaluer d'après le paragraphe 2 :

$$\Phi(f_n,\ \phi_n) - \Phi(f_{n-1},\ \phi_{n-1}) = \Phi(f_n - f_{n-1},\ \phi_n) + \Phi(f_{n-1},\ \phi_n - \phi_{n-1})$$

Il est a signaler que la présente itération ne sera faite que pour :

$4\ \psi_r(T)\ \phi_r(T)\ \langle f_o\rangle_{\mathcal{B}_r} < 1$, conduisant à

$2\ \phi_r(T)\ \langle\langle f_n\rangle\rangle_{r,T} < 1$,

cas où l'itération pour f converge, mais ces conditions sont insuffisantes ici pour assurer la convergence de la suite ϕ_n dans $\mathcal{B}_{r,T}$.

Lemme V .4.3

Si $f_o(x,\vec{\xi})$ ainsi que toutes ses dérivées par rapport à x appartiennent à $\mathcal{B}_\rho(B)$, $\rho \geq 5$, et si de plus f_o et $\dfrac{\partial f_o}{\partial x}$

appartiennent dans $\mathcal{B}_r$, $r > 1$, à la boule de rayon $\frac{1}{8\phi_r(T)\ \psi_r(T)}$, alors, pour tout n , f_n et ϕ_n appartiennent dans $\mathcal{B}_{r,T}$ à la boule de rayon $\frac{1}{4\ \phi_r(T)}$

Reprenons en effet la majoration de $\langle\langle f_n \rangle\rangle_{r,T}$

$$\langle\langle f_n \rangle\rangle_{r,T} \leq \psi_r(T)\ \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r} + \phi_r(T)\ \langle\langle f_{n-1} \rangle\rangle^2_{r,T}$$

Montrons tout d'abord que f_1 et ϕ_1 sont inférieurs à $\frac{1}{4\ \phi_r T}$:

$$\langle\langle f_1 \rangle\rangle_{r,T} \leq \psi_r(T)\ \langle f_o \rangle_{\mathcal{B}_r}$$

$$< \frac{1}{8\ \phi_r(T)}$$

$$\langle\langle \phi_1 \rangle\rangle_{r,T} \leq \psi_r(T)\ \left\langle \frac{\partial f_o}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{B}_r}$$

$$< \frac{1}{8\ \phi_r T}$$

Majorons maintenant ϕ_n et f_n dans $\mathcal{B}_{r,T}$, supposant que ϕ_{n-1} et f_{n-1} sont majorées dans $\mathcal{B}_{r,T}$ par $\frac{1}{4\ \phi_r(T)}$:

$$\langle\langle f_n \rangle\rangle_{r,T}\ \phi_r(T) < \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$< \frac{1}{4}$$

$$\langle\langle \phi_n \rangle\rangle_{r,T}\ \phi_r(T) < \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$< \frac{1}{4}$$

ce qui établit le lemme.

Proposition V .4.1

Sous les hypothèses précédentes, la suite ϕ_n a une limite dans $\mathcal{B}_{r,T}$ quand n tend vers l'infini.

Sous les conditions précédentes, on a :

$$\langle\langle f_{n+1} - f_n \rangle\rangle_{r,T} \leq \frac{1}{2}\ \langle\langle f_n - f_{n-1} \rangle\rangle_{r,T} ,$$

soit, en reportant dans $\langle\langle \phi_{n+1} - \phi_n \rangle\rangle_{r,T}$, les majorations :

$$2\ \phi_r(T)\ \langle\langle \phi_n \rangle\rangle_{r,T} < \frac{1}{2} , \text{ et}$$

$$2\ \phi_r(T)\ \langle\langle f_n \rangle\rangle_{r,T} < \frac{1}{2} :$$

$$\langle\langle \phi_{n+1} - \phi_n \rangle\rangle_{r,T} \leq \frac{1}{2} \left(\langle\langle f_n - f_{n-1} \rangle\rangle_{r,T} + \langle\langle \phi_n - \phi_{n-1} \rangle\rangle_{r,T} \right) ,$$

inégalité que nous allons itérer :

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi_{n+1} - \phi_n \rangle\rangle_{r,T} &< \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \langle\langle f_{n-1} - f_{n-2} \rangle\rangle_{r,T} + \frac{1}{4} \langle\langle \phi_{n-1} - \phi_{n-2} \rangle\rangle_{r,T} \\
&< \frac{1}{2} \langle\langle f_{n-1} - f_{n-2} \rangle\rangle_{r,T} + \frac{1}{4} \langle\langle \phi_{n-1} - \phi_{n-2} \rangle\rangle_{r,T} \\
&\leq \left(\frac{1}{8}\right) \langle\!\langle f_{n-2} - f_{n-3} \rangle\!\rangle_{r,T} + \frac{1}{8} \langle\!\langle \phi_{n-2} - \phi_{n-3} \rangle\!\rangle_{r,T} \\
&\leq \left(\frac{p+1}{2^{p+1}}\right) \langle\!\langle f_{n-p} - f_{n-p-1} \rangle\!\rangle_{r,T} + \frac{1}{2^{p+1}} \langle\!\langle \phi_{n-p} - \phi_{n-p-1} \rangle\!\rangle_{r,T} \\
&\leq \frac{n-2}{2^{n-2}} \langle\langle f_2 - f_1 \rangle\rangle_{r,T} + \frac{1}{2^{n-2}} \langle\langle \phi_2 - \phi_1 \rangle\rangle_{r,T}
\end{aligned}$$

$\frac{n}{2^n}$ et $\frac{1}{2^n}$ étant les termes généraux de séries convergentes, on en déduit que la suite ϕ_n est de Cauchy dans $\mathcal{B}_{r,T}$, ϕ_n converge donc dans cette espace, et la solution $\phi(x,\vec{\xi},t)$ de (II') est bornée dans $\mathcal{B}_{r,T}$ par $\frac{1}{4\phi_{r(T)}}$.

La convergence de $\phi_n = \frac{\partial f_n}{\partial x}$ a lieu uniformément en x, on en déduit que f est dérivable, et sa dérivée est l'élément $\phi(x,\vec{\xi},t)$ ainsi trouvé .

Théorème

> Si f_o et toutes ses dérivées en x appartiennent à $\mathcal{B}_\rho(B)$, $\rho \geq 5$, et si f_o et $\frac{\partial f_o}{\partial x}$ sont bornés dans $\mathcal{B}_r(B)$ par $\frac{1}{8\phi_{r(T)}\psi_{r(T)}}$, $r > 1$, la solution du problème (II) est dérivable par rapport à x, et f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont bornés dans $\mathcal{B}_{r,T}$ par $\frac{1}{4\phi_{r(T)}}$

Remarque :

On pourrait étudier les dérivées d'ordre supérieur en x, compte tenu des résultats obtenus maintenant, de proche en proche, de la même manière, en réduisant le rayon de la boule contenant les premières dérivées de $f_o(x,\vec{\xi})$, notamment pour la dérivée seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$:

On démontrerait ainsi qu'il existe une boule de $\mathcal{B}_r$, de rayon A_n, telle que :

si f_o, $\frac{\partial f_o}{\partial x}$ .... $\frac{\partial^{n-1} f_o}{\partial x}$ appartiennent à cette boule, f est n fois dérivable par rapport à x dans $\mathbb{B}_{r,T}$.

Les résultats du chapitre IV permettent maintenant d'étudier le problème I, en effet :

$\frac{\partial}{\partial t} T(t,-\mathcal{M}+A)f_o = (-\mathcal{M}+A)\ T(t,-\mathcal{M}+A)f_o$ dans $\mathcal{B}^{k-1}_{r-2}(B)$, $r \geqslant 2$, si f_o et ses k premières dérivées appartiennent à $\mathcal{D}^k_r(B)$.

Théorème

si f_o et ses dérivées en x appartiennent à $\mathcal{B}_\rho(L^2(R) \cap L^\infty(R))$, $\rho \geqslant 5$, et si f_o et $\frac{\partial f_o}{\partial x}$ sont bornées dans $\mathcal{B}_r(B)$ par $\frac{1}{8\phi_{r(T)}\psi_{r(T)}}$, la solution f du problème (II) vérifie le problème (I) dans l'espace $\mathcal{B}_{r-2}$, pour $r > 3$.

Théorème A.1

Si $\phi(x,\vec{\xi})$ appartient à $L^2(R,H)$, la quantité $(\xi U\phi,\ U\phi)_H$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

L'expression de l'opérateur U sous la forme d'un produit de convolution sur la variable x va permettre d'établir cette propriété.

$$(\xi U\phi,\ U\phi)_H = \int \frac{1}{\xi} \{\exp\{\frac{-\nu(\vec{\xi})}{\xi} x\}\ Y(\xi x) * \phi(x,\vec{\xi})\ \}^2 \quad \phi\vec{\xi}$$

$$\operatorname*{Max}_x\ |(\xi U\phi, U\phi)_H| \leq \|\operatorname*{Max}_x\ |\frac{1}{\sqrt{|\xi|}} \exp\{\frac{-\nu(\vec{\xi})}{\xi} x\}\ Y\ (\varepsilon x) * \phi(x,\vec{\xi})|\ \|^2_H$$

Rappelons que le produit de convolution de deux fonctions de L^2 vérifie :

(1) $\quad |h * g|_{L^\infty} \leq |h|_{L^2}\ \ |g|_{L^2}$

et que deplus, $h * g$ existe partout et est une fonction continue. Ce résultat peut d'ailleurs être rétabli à l'aide de la transformation de Fourier.

Ici, $\phi(x,\vec{\xi})$ et $\frac{1}{\sqrt{|\xi|}} \exp\{\frac{-\nu(|\vec{\xi}|)x}{\xi}\}\ Y(\varepsilon x)$ sont des éléments de $L^2(R)$, et, pour tout sous ensemble I de R,

$$\operatorname*{Max}_{x\in I}\ |\ \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} \exp \frac{-\nu(\vec{\xi})}{\xi} x\ \ Y(\varepsilon x) * \phi(x,\vec{\xi})\ | \leq \|\phi(x,\vec{\xi})\|_{L^2(I)}\ \ \sqrt{\frac{2}{\nu(|\vec{\xi}|)}}$$

Soit :

$$\operatorname*{Max}_{|x|>A}\ |(\xi U\phi,\ U\phi)_H| \leq \frac{2}{\nu(o)} \int d\vec{\xi} \int_{|x|>A} \phi^2(x,\vec{\xi})\ dx$$

$$< \frac{2}{\nu(o)} \int_{|x|>A} dx\ \ \|\phi(x,\vec{\xi})\|^2_H \ , \text{ cette quantité tend}$$

vers zéro quand A tend vers l'infini, si $\phi(x,\vec{\xi})$ est élément de $L^2(R,H)$.

Théorème A.2

Si $\phi(x,\vec{\xi})$ appartient à $L^2(R^+,H)$, l'expression $(\xi\, E\, g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi\, ,\, E\, g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi)_H$ converge vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

$$(\xi\, E\, g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi,\, E\, g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi)_H = \int_{\xi>o} d\vec{\xi}\ \xi \exp\left(\frac{-2\nu(\vec{\xi})}{\xi}\, x\right)\ (g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi)^2$$

Pour le potentiel intermoléculaire choisi :

$$\frac{\nu(\vec{\xi})}{\xi} > a > o \quad ,$$

et nous pouvons écrire :

$$\max_{x>xo}\ (\xi\, E\, g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi,\, E\, g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi)_H \leq \exp(-2a\, xo) \int_{\xi>o} \xi\ (g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi)^2\, d\vec{\xi}$$

$$\leq \exp(-2a\, xo)\ ||\, g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi\, ||^2_{\tilde{H}^+} \quad ,$$

soit d'après l'hypothèse 1, faite au chapitre II pour l'opérateur g :

$$\max_{x>xo}\ (\xi\, E\, g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi,\, E\, g\, J^-\, B\, \bar{U}\, \phi)_H \leq \exp(-2a\, xo)\ \gamma^2 ||B\, \bar{U}\, \phi||^2_{\tilde{H}^-}$$

$$||B\, \bar{U}\, \phi||^2_{\tilde{H}^-} = \int_{\xi>o} d\vec{\xi}\ \frac{1}{-\xi} \left(\int_o^\infty \exp\left\{\frac{\nu(|\vec{\xi}|)}{\xi}\, y\right\}\ \phi(y,\vec{\xi})\, dy\right)^2 \quad ,$$

l'inégalité de Schwarz permet la majoration :

$$\max_{x>xo}\ (\xi E\, g\, J^-\, B\bar{U}\phi,\, E\, g\, J^-\, B\bar{U}\phi)_H < \exp(-2a\, xo)\ \gamma^2 \int_{\xi<o} d\vec{\xi}\ \frac{\int_o^\infty \phi^2(y,\vec{\xi})\, dy}{2\, \nu(\vec{\xi})}$$

$$\leq \frac{\gamma^2}{2\nu(o)}\ \exp(-2a\, xo)\ |||\phi(x,\vec{\xi})|||^2$$

La dernière quantité tend vers zéro quand xo tend vers $+\infty$, ce qui achève la démonstration.

Théorème A.3

Si $\phi(x,\vec{\xi})$ appartient à $L^2(R,H)$ l'expression $(\xi\, \bar{U}\, \phi,\, \bar{U}\, \phi)_H$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

La démonstration du théorème A.1 se transpose immédiatement, il suffit de limiter les intégrations à la demi droite (o, ∞) , et de ne considérer que $x > A$.

Théorème A.4

Si $f_o(x,\vec{\xi})$ est un élément de $V(R,H)$, à support compact en $\vec{\xi}$, $||\mathcal{C}(t)\, f_o||_H$ et $||\xi\, \mathcal{C}(t)\, f_o||_H$ convergent vers zéro quand x tend vers l'infini, pour t borné :

Nous utiliserons les conséquences suivantes des hypothèses formulées sur $f_o(x,\vec{\xi})$:

1) $\max_x |f_o|$ et $\max_x |\xi\, f_o|$ appartiennent à l'espace H ;

2) Pour presque tout ξ, $T(t)f_o$ et $\xi\, T(t)f_o$ tendent vers zéro quand x tend vers l'infini. Ceci est en effet une conséquence du fait que si f_o est élément de $V(R,H)$, il en est de même de $T(t)f_o$, c'est-à-dire : $T(t)f_o$, $\xi\, T(t)f_o$ et $\xi \frac{\partial T}{\partial x}(t)f_o$ sont des éléments de $L^2(R,H)$, et appartiennent donc à $L^2(R)$ pour presque tout $\vec{\xi}$. Pour presque tout $\vec{\xi}$, les éléments $T(t)f_o$ et $\xi\, T(t)f_o$ appartiennent donc à $\mathcal{H}_0^1(R)$. On peut donc appliquer le résultat suivant de Lions. Magenes [28] p. 52 ; $T(t)f_o$ et $\xi\, T(t)f_o$ sont pour presque tout $\vec{\xi}$ des fonctions continues, nulles à l'infini sur R.

La démonstration du théorème A.4 se fera en plusieurs étapes, qui consisteront à établir que les hypothèses du théorème de la convergence dominée [13] sont bien vérifiées. Rappelons ce théorème :

Soit ϕ_k une suite de fonctions :

a) intégrables

b) convergeant presque partout vers une fonction ϕ

c) les $|\phi_k|$ restent majorées par une fonction intégrable fixe, alors :

$$\int \phi(x)\, dx = \lim \int \phi_k(x)\, dx$$

Nous montrerons en fait que pour xo fixé quelconque, les suites $||\mathcal{C}(t)f_o(xo+k, \vec{\xi})||_H$ et $||\xi\, \mathcal{C}(t)f_o(xo+k, \vec{\xi})||_H$ tendent vers zéro quand $k \to \infty$.

Utilisons la relation entre $T(t)$, semi groupe engendré par $-\mathcal{M}$, et $\mathcal{C}(t)$ engendré par $-\mathcal{M} + A$

$t(t)f_o = T(t)f_o + \int_o^t T(t-\tau)\ A\ \mathcal{C}(t)f_o\ d\tau$, et montrons successivement que :

$||T(t)f_o||_H$, $||\xi\ T(t)f_o||_H$, $||\int_o^t T(t-\tau)A\ \mathcal{C}(\tau)f_o\ d\tau||_H$ et

$||\xi \int_o^t T(t-\tau)\ A\ \mathcal{C}(\tau)f_o\ d\tau$ tendent vers zéro quand x tend vers l'infini.

Proposition A.1

> Si $f_o(x, \vec{\xi})$ appartient à $V(R,H)$, et est tel que $\max_x |f_o(x,\vec{\xi})|$ et $\max_x |\xi\ f_o(x,\vec{\xi})|$ sont des éléments de H , $||T(t)f_o||_H$ et $||\xi\ T(t)f_o||_H$ convergent vers zéro quand x tend vers l'infini.

$||T(t)f_o||_H^2$ et $||\xi\ T(t)f_o||_H^2$ sont des fonctions intégrables en $\vec{\xi}$ dans R^3 , et convergent pour presque tout $\vec{\xi}$ vers zéro quand $x \to \infty$: les conditions a) et b) du théorème de la convergence dominée sont donc réalisées. Il suffit alors d'établir que :

$(T(t)f_o)^2$ et $(\xi\ T(t)f_o)^2$ sont bornées, indépendemment de x, par des fonctions intégrables en $\vec{\xi}$: il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme A.1

$$\operatorname{Max}_x\ |T(t)f_o| \leqslant \exp(-\nu(o)t)\ \operatorname{Max}_x\ |f_o(x,\vec{\xi})|$$

La résolvante de l'opérateur $-\mathcal{M}$, $R(\lambda, -\mathcal{M})$ se met en effet sous la forme :

$$R(\lambda, -\mathcal{M})\ \phi(x, \vec{\xi}) = \frac{1}{\xi}\ \exp - \frac{\nu(\vec{\xi})+\lambda}{\xi}\ x\ \ Y(\varepsilon x)\ *\ \phi(x,\vec{\xi}).$$

Elle satisfait donc :

$$\max_x\ R(\lambda,-\mathcal{M})\ \phi(x,\vec{\xi}) \leqslant \frac{1}{\nu(\vec{\xi})+\lambda}\ \max_x\ |\phi(x,\vec{\xi})|$$

$$\leqslant \frac{1}{\nu(o)+\lambda}\ \max_x\ |\phi(x,\vec{\xi})|$$

Le semi groupe $T(t)$ engendré par $-\mathcal{M}$ dans $L^2(R)$ est borné pour la norme $\max_x |f|$:

$$\max_x |T(t)f_o| \leq \exp(-\nu(o)t) \max_x |f_o(x,\vec{\xi})|$$

La démonstration de la proposition A.1 se termine alors aisément :

$$|T(t)f_o(x,\vec{\xi})|^2 \leq \exp(-2\nu(o)t) \ (\max_x |f_o(x,\vec{\xi})|)^2$$

$$|\xi T(t)f_o(x,\vec{\xi})|^2 \leq \exp(-2\nu(o)t) \ (\max_x |\xi\, f_o(x,\vec{\xi})|)^2$$

Ces fonctions sont indépendantes de x , intégrables en $\vec{\xi}$ dès que $\max_x |f_o|$ et $\max_x |\xi\, f_o|$ sont éléments de H.

Le théorème de la convergence dominée montre alors la proposition A.1.

Pour montrer que $\left|\left|\int_o^t T(t-\tau)\ A\ \mathcal{C}(t)f_o\ d\tau\right|\right|_H$ et $\left|\left|\xi \int_o^t T(t-\tau)\ A\ \mathcal{C}(t)f_o\ d\tau\right|\right|_H$ convergent vers zéro quand $x \to \infty$, et ab lissons le lemme 2, en effet les propriétés de l'opérateur A ne permettent pas d'établir le lemme analogue au lemme 1 pour $\mathcal{C}(t)$, et c'est pourquoi il nous faut passer par la relation entre $T(t)$ et $\mathcal{C}(t)$.

Lemme A.2

Si $\max_x |f_o(x,\vec{\xi})|$ est élément de H , on a :

$$\left|\left|\max_x |\mathcal{C}(t)\ f_o|\right|\right|_H \leq \exp(-\nu(o)+k)t \ \left|\left| \max_x |f_o(x,\vec{\xi})|\right|\right|_H .$$

Il suffit d'établir que la résolvante de $-\mathcal{M}+A$ satisfait :

$$\left|\left|\max_x |R(\lambda, -\mathcal{M}+A)\ \phi(x,\vec{\xi})|\right|\right|_H \leq \frac{1}{\nu(o)+\lambda-k} \left|\left| \max_x |\phi(x,\vec{\xi})|\right|\right|_H ,$$

pour montrer que le semi groupe $\mathcal{C}(t)$ dans $L^2(R,H)$ est un opérateur borné par $\exp(-\nu(o)+k)t$ pour la norme $\left|\left|\max_x |f|\right|\right|_H$.

Reprenons la relation entre $R(\lambda,-\mathcal{M})$ et $R(\lambda,-\mathcal{M}+A)$:

$$R(\lambda,-\mathcal{M}+A)\ \phi(x,\vec{\xi}) = R(\lambda,-\mathcal{M})\ \sum_{n=o}^{\infty} (A\ R(\lambda,-\mathcal{M}))^n\ \phi(x,\vec{\xi})$$

$$\max_x |R(\lambda,-\mathcal{M}+A)\ \phi(x,\vec{\xi})| \leq \frac{1}{\nu(o)+\lambda} \sum_{n=o}^{\infty} \max_x |AR(\lambda,-\mathcal{M})^n\ \phi(x,\vec{\xi})|$$

$$\max_x |AR(\lambda,-\mathcal{M})\ \phi(x,\vec{\xi})| \leq \int_{R^3} |k(\vec{\xi}-\vec{\eta})| \max_x |R(\lambda,-\mathcal{M})\ \phi(x,\vec{\eta})|\ d\vec{\eta}$$

ceci en utilisant :

$$Af = \int_{R^3} k(\vec{\xi} - \vec{\eta})\, f(\vec{\eta})\, d\vec{\eta}$$

où l'opérateur de noyau $|k(\vec{\xi} - \vec{\eta})|$ est borné dans H par une constante K.

Il suffit d'itérer ces deux majorations, pour la norme $||\max_x |f|\,||_H$, pour obtenir la majoration indiquée pour la résolvante.

Proposition A.2

Si $f_o(x,\vec{\xi})$ est élément de $V(R,H)$ et est tel que $\max_x |f_o|$ est élément de H, pour t borné, $||\int_o^t T(t-\tau)A\, \mathcal{C}(\tau) f_o\, d\tau||_H$ et $||\xi \int_o^t T(t-\tau)A\, \mathcal{C}(\tau) f_o\, d\tau||_H$ tendent vers zéro quand x tend vers l'infini.

Montrons tout d'abord que, pour presque tout $\vec{\xi}$, $\int_o^t T(t-\tau)\, A\, \mathcal{C}(\tau)\, f_o\, d\tau$ et $\xi \int_o^t T(t-\tau)\, A\, \mathcal{C}(T)\, f_o\, d\tau$ convergent vers zéro quand x tend vers l'infini.

Si $f_o(x,\vec{\xi})$ est élément de $V(R,H)$, il en est de même de $\mathcal{C}(t)f_o$, ainsi que de $A\, \mathcal{C}(\tau)f_o$, en effet, l'opérateur A est transparent pour la dérivation en x, et, pour un potentiel dur :

$$b||\xi\, Af||_H \leq ||\nu(\vec{\xi})Af||_H \leq a||(1+|\vec{\xi}|^2)^{1/2}\, Af||_H < K_1\, ||f||_H ,$$

ceci d'après la propriété établie par Grad [16] p. 43.

$T(t-\tau)\, A\, \mathcal{C}(\tau)f_o$ et $\xi\, T(t-\tau)\, A\, \mathcal{C}(\tau)f_o$ convergent donc pour presque tout ξ vers zéro quand x tend vers l'infini, de même pour $\int_o^t T(t-\tau)\, A\, \mathcal{C}(\tau)f_o\, d\tau$ et $\xi \int_o^t T(t-\tau)A\, \mathcal{C}(\tau)f_o\, d\tau$, pour t borné.

Montrons alors que ces deux dernières expressions sont majorées par des fonctions indépendantes de x, de carré intégrable en $\vec{\xi}$:

$$\max_x \left| \int_o^t T(t-\tau)A\, \mathcal{C}(\tau)f_o\, d\tau \right| \leq \int_o^t \exp -\nu(o)(t-\tau)\, \max_x |A\, \mathcal{C}(\tau)f_o|\, d\tau ,$$

ceci d'après le lemme A.1, et :

$$\left\| \int_0^t \exp(-\nu(o)(t-\tau)) \max_x A\, \mathcal{C}(\tau) f_o \, d\tau \right\|_H \leq \int_0^t \exp\left[-\nu(o)(t-\tau)\right] \left\| \max_x A\, \mathcal{C}(\tau) f_o \right\|_H d\tau$$

$$\leq K \int_0^t \exp\left[-\nu(o)(t-\tau)\right] \left\| \max_x |\mathcal{C}(\tau) f_o| \right\|_H d\tau$$

et, d'après le lemme A.2

$$\leq K \int_0^t \exp\left[-\nu(o)(t-\tau)\right] \exp(-\nu(o)+k)\tau \left\| \operatorname{Max}_x |f_o| \right\|_H d\tau$$

expression qui est bien bornée, pourvu que $\max_x |f_o|$ soit élément de H, ceci pour tout t borné.

Il reste à étudier :

$$\left\| \xi \int_0^t \exp -\nu(o)(t-\tau) \max_x |A\, \mathcal{C}(\tau) f_o| d\tau \right\|_H \leq \int_0^t \exp\left[-\nu(o)(t-\tau)\right] \max_x \left\| \xi\, A \mathcal{C}(\tau) f_o \right\|_H d\tau$$

où il suffit d'employer la majoration

b $\| \xi\, Af \|_H < K_1 \|f\|_H$, et le raisonnement s'achève comme précédemment, le coefficient K_1 remplaçant le coefficient K précédemment obtenu.

Le théorème de la convergence dominée s'applique donc, ce qui établit le théorème A.4.

Pour des raisons de normalisation et d'orthogonalité dans l'espace H, les cinq invariants des rencontres, base de l'espace $\mathcal{P}_H$ sont pris sous la forme :

$$\psi^o(\vec{\xi}) = 1 \cdot \omega^{1/2}$$

$$\psi^{(1)}(\vec{\xi}) = \xi\,\omega^{1/2} \quad \psi^2(\vec{\xi}) = \eta\,\omega^{1/2}, \quad \psi^3(\vec{\xi}) = \zeta\,\omega^{1/2}$$

$$\psi^4(\vec{\xi}) = (|\vec{\xi}|^2 - 3)\frac{1}{\sqrt{6}}\,\omega^{1/2}, \quad \text{où} \quad \omega(\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp - \frac{|\vec{\xi}|^2}{2}$$

Afin de faire les calcule qui vont suivre plus aisément, rappelons que la fonction Eulérienne $\Gamma(z)$ est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_o^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \quad \text{et vérifie}$$

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

et exprimons à l'aide de $\Gamma(z)$

$$f(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt, \quad \text{pour les valeurs entières de } n :$$

$f(2k+1) = o$ pour raison de parité :

$$f(2k) = 2\int_o^\infty t^{2k} \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt$$

$$f(2k) = 2^{k+\frac{1}{2}}\,\Gamma(k+\tfrac{1}{2})$$

I - Calcul de $\Delta_{\alpha\beta} = (\xi\,\psi_\alpha(\vec{\xi}), \psi_\beta(\vec{\xi}))_H$

Pour des raisons de parité ; les éléments suivant seront non nuls

$$\Delta_{o1} \quad \text{et} \quad \Delta_{14}$$

Pour tous les autres couples d'indices interviendra en effet dans le calcul un facteur $f(2k+1)$.

a) Calcul de Δ_{o1}

$$\Delta_{o1} = \int_{R^3} \xi^2 \, \omega(\vec{\xi}) \, d\vec{\xi}$$

Dans l'expression de Δ_{o1}, on reconnait :

$$\Delta_{o1} = (\psi_1(\vec{\xi}), \psi_1(\vec{\xi}))_H$$

$$= 1 \text{ , la base choisie } \psi_i(\vec{\xi}) \text{ étant orthonormale.}$$

b) Calcul de Δ_{14}

$$\Delta_{14} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_{R^3} \xi^2 \, (|\vec{\xi}|^2 - 3) \, \exp(-\frac{|\vec{\xi}|^2}{2}) \, d\vec{\xi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} \xi^2 (\xi^2+\eta^2+\zeta^2-3) \exp - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2} \, d\vec{\xi}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}} \Delta_{o1} + \frac{1}{\sqrt{6}} (2\pi)^{-3/2} \left[f(4) \, f(o)^2 + 2 \, f(2)^2 \, f(o) \right]$$

Nous avons remarqué en effet la symétrie en η et ζ.

$$\Delta_{14} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{ - 3 + (2\pi)^{-3/2} \left[2^{7/2} \, \Gamma(\tfrac{5}{2}) \, \Gamma(\tfrac{1}{2})^2 + 2^{7/2} \, \Gamma(\tfrac{3}{2})^2 \, \Gamma(\tfrac{1}{2}) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}$$

II - Calcul du déterminant δ_{ij}

$$\delta_{ij} = (\theta_i(\vec{\xi}), \theta_j(\vec{\xi}))_H$$

où $\quad \theta_i(\vec{\xi}) = \psi_i(\vec{\xi}) \quad i = o, 1, 2, 3, 4$

$\quad \theta_j(\vec{\xi}) = \xi \, \psi_i(\vec{\xi}) \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 5, 6, 7, 8.$

Exploitons le fait que les $\psi_i(\vec{\xi})$ sont orthonormés :

$$\left.\begin{array}{lll} \delta_{ij} = 0 & i \neq j \\ = 1 & i = j \end{array}\right\} \quad i, j = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\delta_{50} = \Delta_{01} = 1$$

$$\delta_{54} = \Delta_{14} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_{51} = \delta_{52} = \delta_{53} = o\\ \delta_{56} = \delta_{57} = \delta_{58} = o\end{aligned}\right\} \quad \text{pour raison de parité}$$

$$\delta_{60} = \delta_{61} = \delta_{6j} = o \qquad j \neq 6 \quad \text{de même} \quad \delta_{7j} = o \quad \text{pour} \quad j \neq 7.$$

$$\delta_{80} = \delta_{83} = \delta_{8j} = o \qquad j \neq 8 \quad \text{et} \quad j \neq 1$$

$$\delta_{81} = \Delta_{14} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Il reste donc à faire le calcul effectif de :

$$\delta_{55}\ ,\ \delta_{66} = \delta_{77}\ ,\ \delta_{88}$$

$$\delta_{55} = (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} \xi^4 \exp - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2}\, d\vec{\xi}$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\ f(4)\ f(o)^2$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\ \Gamma(\tfrac{5}{2})\ \Gamma(\tfrac{1}{2})^2\ 2^{7/2}$$

$$= 3$$

$$\delta_{66} = \delta_{77} = (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} \xi^2\ \eta^2 \exp - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2}\, d\vec{\xi}$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\ f(2)^2\ f(o)$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\ \Gamma(\tfrac{3}{2})^2\ \Gamma(\tfrac{1}{2})\ 2^{7/2}$$

$$= 2$$

$$\delta_{88} = \frac{1}{6} \int_{R^3} \xi^2 \left[(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 - 6(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + 9\right] \exp - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2}\, d\vec{\xi}\ .(2\pi)^{-3/2}$$

$$= \frac{1}{6}\ (2\pi)^{-3/2} \Big[f(6)\ f(o)^2 + 6\ f(4)\ f(2)\ f(o) + 2\ f(2)^3 - 6\ f(4)\ f(o)^2 - 12\ f(2)^2\ f(o) \Big] + \frac{9}{6}$$

$$= \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Le déterminant (δ_{ij}) se présente donc sous la forme :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{20}{3} \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 2 \end{vmatrix}$$

$D \neq 0.$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARCENIEV — Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann linéarisée (en russe)
J. Calcul num. URSS vol. 5 N° 5 1965.

[2] BOLTZMANN — Lectures on gaz theory

[3] BATHNAGAR-GROSS-KROOK — A model for collision processes in gases
Physik rev. vol. 94 p. 511 1954.

[4] CARLEMAN — Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz .
Almquist et Wikseles. Uppsala (1957)

[5] CERCIGNANI — Mathematical methods in kinetic theory
Plenum press. New York (1969)

[6] — Elementary solutions of linearized kinetic models and boundary value problems, in the kinetic theory of gases.
Brown University Lectures notes.

[7] — Existence and uniqueness in the large for boundary value problems in kinetic theory
G. Math. Phys. vol. 8 N° 8 (1967)

[8] — On Boltzmann equation with cut off potentials.
Phys. of Fluids. vol. 10 N° 10 (1967)

[9] — Existence, uniqueness and convergence of the solutions of models in kinetic theory.
G. of. Math. Physics. vol. 9 N° 4 (1968)

[10] CHAHINE — The structure of strong shock waves in the Krook collision model
Rarefied gaz dynamics. Laurmann 1963.

[11] CHAPMAN ET COWLING — The mathematical theory of non uniform gases.
Cambridge. University Press. London (1939)

[12] DARROZES — Etude de la structure d'un choc faible avec le modèle cinétique de Krook Boltzmann.
La recherche aérospatiale N° 95 (1963)

[13] DIXMIER — L'intégrale de Lebesgue
Centre de Documentation Universitaire PARIS

[14] DUNFORD SCHWARTZ — Linear operators. Part I
Pure and applied mathematics.
Interscience publishers. New York (1958)

[15] FETZ — 7^{th} Symposium on rarefied gaz dynamics
Pise. 1970

[16] GRAD — Principles on the kinetic theory of gases.
Handbuch der Physik. vol. 12 Sed. 26 (1958)

[17] — Asympototic theory of the Boltsmann equation
Rarefied gaz dynamics I - Laurman 1963

[18] — On the kinetic theory of rarefied gases.
Com. Pur. and appl. Math. vol. 7 (1949)

[19] — Solution of the Boltzmann equation in an unbounded domain.
Com. Pur. and appl. Math. vol. 18 (1965)

[20] — On the Boltzmann H Theorem.
J. Soc. Industr. Appl. Math. vol. 13 (1965)

[21] — Profile of a steady shock wave
Com. pur and appl. Math. vol. 5 N° 3 (1952)

[22] — Asympototic equivalence of the Navier Stokes and non linear Boltzmann equation.
Proc. Amer Math. Soc. Symposium on Applications of partial differential equations - New York (1964

[23] GROSS AND JACKSON — Kinetic models and the linearized Boltzmann equation.
Phys. of Fluids vol. 2 N° 4 (1959)

[24] GUIRAUD — Sur le problème de Couette et l'équation de Boltzmann
J. de Mécanique vol. 7 N° 2 (1968)

[25] GUIRAUD — Problème aux limites intérieur pour l'équation de Boltzmann linéaire.
J. de Mécanique vol. 9 N° 3 (1970)
et Congrès International des Mathématiciens NICE 1970 Tome 3 p. 115

[26] HILLE ET PHILLIPS — Functional analysis and semi groups.
American Mathematical Society
Springer Verlag (1964)

[27] KATO — Perturbation theory and semi groups.
Springer Verlag.

[28] LIONS ET MAGENES — Problèmes aux limites non homogènes et applications
vol. 1 Dunod PARIS (1968)

[29] NARAŞIMHA — Asymptotic solutions in non equilibrium flow. Part I : the weak shock.
J.F. Mec. vol. 34 (1968)

[30] NOCILLA — Basic concept in the surface interaction of free molecular flow.
Nlecanica vol. 2 N° 1 (1967)

[31] PAO (YOUNG PING) — Boundary value problems for the linearized and neakly non linear Boltzmann equation
J. of Math. Phys. vol. 8 N° 9 (1967)

[32] RIESZ ET NAGY — Leçons d'analyse fonctionnelle
Gauthier Villars

[33] SCHARF — Functional analytic discussion of the linearized Boltzmann equation.
Helv. Phys. Acta. vol. 40 N° 7 (1967)

[34] SCHARF — Normal solutions of the linearized Boltzmann equation.
Helv. Phys. Acta. vol. 42 N° 1 (1968)

[35] SIROVICH — Formal and asymptotic relations in kinetic theory. Phys. of Fluids. vol. 6 N° 2 (1963)

[36] — On some mathematical aspects of the kinetic model equations. Brown University Lectures notes.

[37] — Class of exact solutions in non linear kinetic theory. Phys. of Fluids. vol. 11 N° 12 (1965)

[38] TREVES — Linear partial differential equations with constant coefficients.

[39] ZAANEN — Linear analysis North Holland Publishing (1964)

ACADÉMIE DE PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

, Place Jussieu - 75230 PARIS-CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3e cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - 325-12-21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : . . DOCTORAT ES SCIENCES . . . . . .

THESE DE : . . . MATHEMATIQUES . . . . . .

NOM : . . Madame RIGOLOT . . . . . .

Prénoms : . . Christiane . . . . . .

né le 25 Juillet 19 41 à . . . Orléans . . . . . Dépt : . . Loiret

1ère THESE : . . " . Sur la théorie mathématique de l'équation de Boltzmann.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : . Sur le groupe des automorphismes d'une variété symplectique. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

PRESIDENT.M.AVEZ
EXAMINATEURS.M.GUIRAUD
M.GOULAOUIC.

ACADEMIE DE PARIS UNIVERSITE PARIS VI

Vu et Approuvé

PARIS, le 12 . . Février 1973

Le Président

de l'Université de PARIS VI

Pour le Président de l'Université PARIS VI
et par délégation,
Le Vice-Président,

Sc.3e c. 72-09